Raíces, radicales y números complejos

7



OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

En este capítulo explicaremos cómo sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones con radicales. También graficamos funciones con radicales y damos una introducción a los números imaginarios y números complejos.

Asegúrese de entender los tres requisitos para simplificar expresiones con radicales que se analizan en la sección 7.5.

MUCHAS FÓRMULAS CIENTÍFICAS, INCLUYENDO gran parte de aquellas que tienen que ver con situaciones de la vida real, incluyen expresiones con radicales. En el ejercicio 135 de la página 487 veremos cómo se utiliza un radical para determinar la relación entre la iluminación sobre un objeto y la distancia del objeto a la fuente luminosa.

7.1 Raíces y radicales

1. Determinar raíces cuadradas.
2. Determinar raíces cúbicas.
3. Entender raíces pares e impares.
4. Evaluar radicales mediante el valor absoluto.

En este capítulo analizamos con más detalle el concepto de radicales que se presentó en el capítulo 1. En la expresión $\sqrt{x}$, el $\sqrt{\ }$ es el **signo radical**. La expresión que está dentro del signo radical recibe el nombre de **radicando**.

Signo radical

$$\sqrt{x}$$

Radicando

La expresión, con el signo radical y el radicando, se denomina **expresión radical**. Otra parte de la expresión radical es el **índice**, o "raíz" de la expresión. Las raíces cuadradas tienen un índice de 2. Por lo general, el índice de las raíces cuadradas no se escribe. Por lo tanto,

$$\sqrt{x} \quad \text{significa} \quad \sqrt[2]{x}$$

1 Determinar raíces cuadradas

Todos los números positivos tienen dos raíces cuadradas: una positiva o principal, y una negativa. Para cualquier número positivo x, escribimos la raíz cuadrada positiva como $\sqrt{x}$, y la raíz cuadrada negativa como $-\sqrt{x}$.

Número	Raíz cuadrada principal o positiva	Raíz cuadrada negativa
25	$\sqrt{25}$	$-\sqrt{25}$
19	$\sqrt{19}$	$-\sqrt{19}$

Raíz cuadrada principal

La **raíz cuadrada principal** de un número positivo a, escrita como $\sqrt{a}$, es el número *positivo* b tal que $b^2 = a$.

Ejemplos

$\sqrt{25} = 5$ ya que $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

$\sqrt{0.49} = 0.7$ ya que $(0.7)^2 = (0.7)(0.7) = 0.49$

$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ ya que $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$

Recuerde que $-\sqrt{25}$ significa el opuesto de $\sqrt{25}$. Ya que $\sqrt{25} = 5$, $-\sqrt{25} = -5$.

En este libro, siempre que se haga referencia al concepto *raíz cuadrada* nos estaremos refiriendo a la raíz cuadrada principal o positiva. Así, si se le pide determinar el valor de $\sqrt{25}$, su respuesta deberá ser 5.

En el capítulo 1 se mencionó que un número racional es aquel que puede representarse como un número decimal finito o cuyos dígitos se repiten en series. Si utiliza la tecla de raíz cuadrada de su calculadora $\boxed{\sqrt{\ }}$, para evaluar las soluciones de los tres ejemplos anteriores, descubrirá que todos son números decimales finitos o con series de dígitos que se repiten. Por lo tanto, son *números racionales*. Muchos radicales, como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{19}$, no son números racionales. Cuando en una calculadora se evalúan $\sqrt{2}$ y $\sqrt{19}$ los resultados son números decimales que no son finitos y que no repiten series de dígitos. Así, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{19}$ son *números irracionales*.

Radical	Resultados en la calculadora	
$\sqrt{2}$	1.414213562	*Decimales que no son finitos y que no repiten series de dígitos*
$\sqrt{19}$	4.35889894	*Decimales que no son finitos y que no repiten series de dígitos*

Ahora piense en la expresión radical $\sqrt{-25}$. Como el cuadrado de cualquier número real siempre será mayor o igual a 0, no existe número real tal que, elevado al

cuadrado, sea igual a -25. Por esta razón, $\sqrt{-25}$ *no es un número real*. Ya que ningún número real elevado al cuadrado puede dar por resultado un número negativo, *la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real*. Si en una calculadora evalúa $\sqrt{-25}$ obtendrá un mensaje de error. Analizaremos las expresiones como $\sqrt{-25}$ más adelante en este capítulo.

Radical	Resultados en la calculadora	
$\sqrt{-25}$	Error	$\sqrt{-25}$ no es un número real.
$\sqrt{-3}$	Error	$\sqrt{-3}$ no es un número real.

Sugerencia útil

No confunda $-\sqrt{36}$ con $\sqrt{-36}$. Ya que $\sqrt{36} = 6$, $-\sqrt{36} = -6$. Sin embargo, $\sqrt{-36}$ no es un número real y, tal como se mencionó antes, la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real.

$$\sqrt{36} = 6$$
$$-\sqrt{36} = -6$$
$\sqrt{-36}$ no es un número real.

La función raíz cuadrada

Cuando representemos gráficamente funciones raíz cuadrada, es decir, funciones con la forma $f(x) = \sqrt{x}$, debemos recordar siempre que el radicando, x, no puede ser negativo. Así, en notación de intervalo el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $\{x|x \geq 0\}$, o, en la notación de intervalo, $[0, \infty)$ Para graficar $f(x) = \sqrt{x}$, podemos seleccionar algunos valores convenientes de x y determinar los valores correspondientes de $f(x)$ o y, para luego trazar los puntos determinados por los pares ordenados, como se muestra en la **figura 7.1**.

x	y
0	0
1	1
4	2
6	≈2.4
9	3

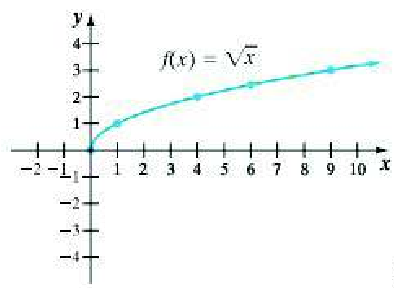


FIGURA 7.1

Como el valor de $f(x)$ nunca puede ser negativo, el rango de $f(x) = \sqrt{x}$ es $\{y|y \geq 0\}$, o, en notación de intervalo, $[0, \infty)$.

Analice la **figura 7.1**; ¿cree que pueda graficar $g(x) = -\sqrt{x}$? La gráfica de $g(x) = -\sqrt{x}$ sería similar a la gráfica de la **figura 7.1**, pero la gráfica resultante estaría debajo del eje x. ¿Puede explicar por qué? ¿Qué ocurriría al graficar la expresión $h(x) = \sqrt{x-4}$? Para graficar $h(x) = \sqrt{x-4}$, sólo seleccionaría valores de $x \geq 4$ ya que el radicando no puede ser negativo. El dominio de $h(x) = \sqrt{x-4}$ es $\{x|x \geq 4\}$ o $[4, \infty)$.

Para evaluar funciones con radicales podría ser necesario utilizar una calculadora.

EJEMPLO 1 ▶ Determine el o los valores que se indican en cada función.

a) $f(x) = \sqrt{11x - 2}$, $f(6)$ **b)** $g(r) = -\sqrt{-3r+1}$, $g(-5)$ y $g(7)$

Solución

a) $f(6) = \sqrt{11(6) - 2}$ *Sustituir x por 6.*
$= \sqrt{64}$
$= 8$

b) $g(-5) = -\sqrt{-3(-5) + 1}$ *Sustituir r por −5.*
$= -\sqrt{16}$
$= -4$

$g(7) = -\sqrt{-3(7) + 1}$ *Sustituir r por 7.*
$= -\sqrt{-20}$ *No es un número real.*

Por lo tanto, $g(7)$ no es un número real.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 77

2 Determinar raíces cúbicas

El índice de una raíz cúbica es 3. En la sección 1.4 se habló de las raíces cúbicas, y se explicó cómo determinarlas con ayuda de una calculadora. Si lo considera conveniente, revise ese material ahora.

Raíz cúbica

La **raíz cúbica** de un número a, escrita $\sqrt[3]{a}$, es el número b tal que $b^3 = a$.

Ejemplos

$\sqrt[3]{8} = 2$ ya que $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{-27} = -3$ ya que $(-3)^3 = -27$

Sólo existe una raíz cúbica para cada número real. La raíz cúbica de un número positivo es positiva, y la raíz cúbica de un número negativo es negativa. La función raíz cúbica, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, tiene a todos los números reales como su dominio.

EJEMPLO 2 Determine el o los valores que se indican en cada función.

a) $f(x) = \sqrt[3]{10x + 34}, f(3)$ **b)** $g(r) = \sqrt[3]{12r - 20}$, $g(-4)$ y $g(1)$

Solución

a) $f(3) = \sqrt[3]{10(3) + 34}$ Sustituir x por 3.

$= \sqrt[3]{64} = 4$

b) $g(-4) = \sqrt[3]{12(-4) - 20}$ Sustituir r por -4.

$= \sqrt[3]{-68}$

≈ -4.081655102 Resultado con una calculadora.

$g(1) = \sqrt[3]{12(1) - 20}$ Sustituir r por 1.

$= \sqrt[3]{-8}$

$= -2$

Ahora resuelva el ejercicio 83

La función raíz cúbica

En la **figura 7.2** se muestra la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$. Para obtenerla sustituimos los valores para x y determinamos los valores correspondientes de $f(x)$ o y.

x	y
-8	-2
-1	-1
0	0
1	1
8	2

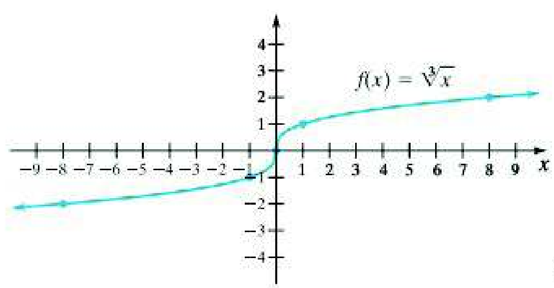


FIGURA 7.2

Observe que tanto el dominio como el rango están compuestos por números reales, ℝ. En el conjunto de ejercicios se le pedirá que grafique funciones raíz cúbica en su calculadora graficadora.

3 Entender raíces pares e impares

Hasta el momento hemos analizado raíces cuadradas y cúbicas, pero las expresiones radicales pueden tener otros índices. Por ejemplo, en la expresión $\sqrt[5]{xy}$, (se lee "raíz quinta de xy"), el índice es 5 y el radicando es xy.

Las expresiones radicales que tienen índices 2, 4, 6,... o cualquier número entero par, reciben el nombre de **raíces pares**. Las raíces cuadradas son raíces pares, ya que su índice es 2. Las expresiones radicales que tienen índices 3, 5, 7,... o cualquier número entero impar, se denominan **raíces impares**.

Índices pares

La raíz n-ésima de a, $\sqrt[n]{a}$, donde n es un *índice par* y a es un número real no negativo, es un número real no negativo b tal que $b^n = a$.

Ejemplos de raíces pares

$\sqrt{9} = 3$ ya que $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

$\sqrt[4]{16} = 2$ ya que $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

$\sqrt[6]{729} = 3$ ya que $3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$

$\sqrt[4]{\frac{1}{256}} = \frac{1}{4}$ ya que $\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{256}$

Cualquier número real elevado a una potencia par, da por resultado un número real no negativo. Así, *cuando un radical tiene índice par, el radicando debe ser no negativo para que el resultado sea un número real.*

Sugerencia útil

Existe una diferencia importante entre $-\sqrt[4]{16}$ y $\sqrt[4]{-16}$. El número $-\sqrt[4]{16}$ es el opuesto de $\sqrt[4]{16}$. Ya que $\sqrt[4]{16} = 2$, $-\sqrt[4]{16} = -2$. Sin embargo, $\sqrt[4]{-16}$ no es un número real, puesto que ningún número real elevado a la cuarta potencia da por resultado -16.

$$-\sqrt[4]{16} = -(\sqrt[4]{16}) = -2$$

$\sqrt[4]{-16}$ no es un número real.

Índices impares

La raíz n-ésima de a, $\sqrt[n]{a}$, donde n es un *índice impar* y *a es cualquier número real*, es el número real b tal que $b^n = a$.

Ejemplos de raíces impares

$\sqrt[3]{8} = 2$ ya que $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$\sqrt[3]{-8} = -2$ ya que $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$

$\sqrt[5]{243} = 3$ ya que $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

$\sqrt[5]{-243} = -3$ ya que $(-3)^5 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = -243$

La raíz impar de un número positivo es un número positivo, y la raíz impar de un número negativo es un número negativo.

Es importante tener en cuenta que los radicales con índice par deben tener radicandos no negativos para que dé por resultado un número real. Un radical con un índice impar será un número real con cualquier número real como radicando. Observe que $\sqrt[n]{0} = 0$, sin importar si n es un índice par o impar.

EJEMPLO 3 ▸ Indique si la expresión radical es o no un número real. Si el número es un número real, determine su valor.

a) $\sqrt[4]{-81}$ **b)** $-\sqrt[4]{81}$ **c)** $\sqrt[5]{-32}$ **d)** $-\sqrt[5]{-32}$

Solución

a) No es un número real. Las raíces pares de números negativos no son números reales.

b) Número real, $-\sqrt[4]{81} = -(\sqrt[4]{81}) = -(3) = -3$

c) Número real, $\sqrt[5]{-32} = -2$ ya que $(-2)^5 = -32$

d) Número real, $-\sqrt[5]{-32} = -(-2) = 2$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 21

En la **tabla 7.1** se resume la información acerca de las raíces pares e impares.

Tabla 7.1

	n es par	n es impar
$a > 0$	$\sqrt[n]{a}$ es un número real positivo.	$\sqrt[n]{a}$ es un número real positivo.
$a < 0$	$\sqrt[n]{a}$ no es un número real.	$\sqrt[n]{a}$ es un número real negativo.
$a = 0$	$\sqrt[n]{0} = 0$	$\sqrt[n]{0} = 0$

4 Evaluar radicales mediante el valor absoluto

Se podría pensar que $\sqrt{a^2} = a$, pero esto no necesariamente es cierto. A continuación evaluamos $\sqrt{a^2}$ para $a = 2$ y $a = -2$. Verá que cuando $a = -2$, $\sqrt{a^2} \neq a$.

$a = 2$: $\sqrt{a^2} = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$ Observe que $\sqrt{2^2} = 2$.

$a = -2$: $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ Observe que $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$.

Al analizar éste y otros ejemplos, podemos concluir que $\sqrt{a^2}$ *siempre será un número real positivo* para cualquier número real, a, distinto de cero. Recuerde que en la sección 1.3 se mencionó que el *valor absoluto* de cualquier número real a, o $|a|$, es también un número real positivo para cualquier número real distinto de cero. Utilizamos estos hechos para concluir que,

Radicales y valor absoluto

Para cualquier número real a,

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Esto indica que la raíz cuadrada principal de a^2 es el valor absoluto de a.

EJEMPLO 4 Utilice el valor absoluto para evaluar.

a) $\sqrt{9^2}$ **b)** $\sqrt{0^2}$ **c)** $\sqrt{(15.7)^2}$

Solución

a) $\sqrt{9^2} = |9| = 9$ **b)** $\sqrt{0^2} = |0| = 0$ **c)** $\sqrt{(15.7)^2} = |15.7| = 15.7$

Ahora resuelva el ejercicio 41

Cuando se simplifica una raíz cuadrada, si el radicando contiene una variable y no estamos seguros de que su valor sea positivo, deberemos utilizar los signos de valor absoluto para simplificar.

EJEMPLO 5 Simplifique.

a) $\sqrt{(x + 8)^2}$ **b)** $\sqrt{16x^2}$ **c)** $\sqrt{25y^6}$ **d)** $\sqrt{a^2 - 6a + 9}$

Solución Los radicandos de todas estas raíces cuadradas incluyen una variable. Como no conocemos el valor de la variable, ignoramos si ésta es positiva o negativa. Por lo tanto, debemos utilizar los signos de valor absoluto para simplificar.

a) $\sqrt{(x + 8)^2} = |x + 8|$

b) Escriba $16x^2$ como $(4x)^2$, y luego simplifique.

$$\sqrt{16x^2} = \sqrt{(4x)^2} = |4x|$$

c) Escriba $25y^6$ como $(5y^3)^2$, y luego simplifique.

$$\sqrt{25y^6} = \sqrt{(5y^3)^2} = |5y^3|$$

d) Observe que $a^2 - 6a + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto. Escriba el trinomio como el cuadrado de un binomio; después simplifique.

$$\sqrt{a^2 - 6a + 9} = \sqrt{(a - 3)^2} = |a - 3|$$

Ahora resuelva el ejercicio 63

Si tiene una raíz cuadrada cuyo radicando contiene una variable, y se le da una instrucción como: "Suponga que todas las variables representan valores positivos y que el radicando es no negativo", no será necesario que utilice el signo de valor absoluto para simplificar.

EJEMPLO 6 Simplifique. Suponga que todas las variables representan valores positivos y que el radicando es no negativo.

a) $\sqrt{64x^2}$ **b)** $\sqrt{81p^4}$ **c)** $\sqrt{49x^6}$ **d)** $\sqrt{4x^2 - 12xy + 9y^2}$

Solución

a) $\sqrt{64x^2} = \sqrt{(8x)^2} = 8x$ — Escriba $64x^2$ como $(8x)^2$.

b) $\sqrt{81p^4} = \sqrt{(9p^2)^2} = 9p^2$ — Escriba $81p^4$ como $(9p^2)^2$.

c) $\sqrt{49x^6} = \sqrt{(7x^3)^2} = 7x^3$ — Escriba $49x^6$ como $(7x^3)^2$.

d) $\sqrt{4x^2 - 12xy + 9y^2} = \sqrt{(2x - 3y)^2}$ — Escriba $4x^2 - 12xy + 9y^2$ como $(2x - 3y)^2$.

$= 2x - 3y$

Ahora resuelva el ejercicio 67

Sólo nos preocupamos de agregar signos de valor absoluto cuando se trabaja con raíces cuadradas (y otras raíces pares), pero no cuando el índice es impar.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.1

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. **a)** ¿Cuántas raíces cuadradas tienen los números reales positivos?
   b) Determine todas las raíces cuadradas del número 49.
   c) Cuando se mencione el concepto "raíz cuadrada" en este libro, ¿a qué se estará haciendo referencia?
   d) Determine la raíz cuadrada de 49.
2. **a)** ¿Qué son las raíces pares? Dé un ejemplo.
   b) ¿Qué son las raíces impares? Proporcione un ejemplo.
3. Explique por qué $\sqrt{-81}$ no es un número real.
4. Una expresión radical con índice impar y un número real como radicando, ¿siempre será un número real? Explique su respuesta.
5. Una expresión radical con índice par y un número real como radicando, ¿siempre será un número real? Explique su respuesta.
6. **a)** ¿A qué es igual $\sqrt{a^2}$?
   b) ¿A qué es igual $\sqrt{a^2}$ si sabemos que $a \geq 0$?
7. **a)** Evalúe $\sqrt{a^2}$ para $a = 1.3$.
   b) Evalúe $\sqrt{a^2}$ para $a = -1.3$.
8. **a)** Evalúe $\sqrt{a^2}$ para $a = 5.72$.
   b) Evalúe $\sqrt{a^2}$ para $a = -5.72$.
9. **a)** Evalúe $\sqrt[3]{27}$.
   b) Evalúe $-\sqrt[3]{27}$.
   c) Evalúe $\sqrt[3]{-27}$.
10. **a)** Evalúe $\sqrt[4]{16}$
    b) Evalúe $-\sqrt[4]{16}$
    c) Evalúe $\sqrt[4]{-16}$.

Práctica de habilidades

Evalúe si cada expresión radical es un número real. Utilice una calculadora para redondear los números irracionales hasta el centésimo más cercano. Si la expresión no es un número real, indíquelo.

11. $\sqrt{36}$ **12.** $-\sqrt{36}$ **13.** $\sqrt[3]{-64}$ **14.** $\sqrt[3]{125}$

15. $\sqrt[3]{-125}$ **16.** $-\sqrt[3]{-125}$ **17.** $\sqrt[5]{-1}$ **18.** $-\sqrt[5]{-1}$

19. $\sqrt[5]{1}$ **20.** $\sqrt[6]{64}$ **21.** $\sqrt[6]{-64}$ **22.** $\sqrt[4]{-81}$

23. $\sqrt[3]{-343}$ **24.** $\sqrt{121}$ **25.** $\sqrt{-36}$ **26.** $\sqrt{45.3}$

27. $\sqrt{-45.3}$ **28.** $\sqrt{53.9}$ **29.** $\sqrt{\frac{1}{25}}$ **30.** $\sqrt{-\frac{1}{25}}$

31. $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ **32.** $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$ **33.** $\sqrt{\frac{4}{49}}$ **34.** $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

35. $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$ **36.** $\sqrt[4]{-8.9}$ **37.** $-\sqrt[4]{18.2}$ **38.** $\sqrt[5]{93}$

Utilice el valor absoluto para evaluar.

39. $\sqrt{7^2}$ **40.** $\sqrt{(-7)^2}$ **41.** $\sqrt{19^2}$ **42.** $\sqrt{(-19)^2}$

43. $\sqrt{119^2}$ **44.** $\sqrt{(-119)^2}$ **45.** $\sqrt{(235.23)^2}$ **46.** $\sqrt{(-201.5)^2}$

47. $\sqrt{(0.06)^2}$ **48.** $\sqrt{(-0.19)^2}$ **49.** $\sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2}$ **50.** $\sqrt{\left(-\frac{101}{319}\right)^2}$

Escriba como un valor absoluto.

51. $\sqrt{(x-4)^2}$ **52.** $\sqrt{(a+10)^2}$ **53.** $\sqrt{(x-3)^2}$ **54.** $\sqrt{(7a-11b)^2}$

55. $\sqrt{(3x^2-1)^2}$ **56.** $\sqrt{(7y^2-3y)^2}$ **57.** $\sqrt{(6a^3-5b^4)^2}$ **58.** $\sqrt{(9y^4-2z^3)^2}$

Utilice el valor absoluto para simplificar. Tal vez necesite factorizar primero.

59. $\sqrt{a^{14}}$ **60.** $\sqrt{y^{22}}$ **61.** $\sqrt{z^{32}}$ **62.** $\sqrt{x^{200}}$

63. $\sqrt{a^2-8a+16}$ **64.** $\sqrt{x^2-12x+36}$ **65.** $\sqrt{9a^2+12ab+4b^2}$ **66.** $\sqrt{4x^2+20xy+25y^2}$

Simplifique. Suponga que todas las variables representan valores positivos y que el radicando es no negativo.

67. $\sqrt{49x^2}$ **68.** $\sqrt{100a^4}$ **69.** $\sqrt{16c^6}$ **70.** $\sqrt{121z^8}$

71. $\sqrt{x^2+4x+4}$ **72.** $\sqrt{9a^2-6a+1}$ **73.** $\sqrt{4x^2+4xy+y^2}$ **74.** $\sqrt{16b^2-40bc+25c^2}$

Determine el valor indicado en cada función. Utilice su calculadora para aproximar los números irracionales. Redondéelos al milésimo más cercano.

75. $f(x)=\sqrt{5x-6}, f(2)$ **76.** $f(c)=\sqrt{7c+1}, f(5)$ **77.** $q(x)=\sqrt{76-3x}, q(4)$

78. $q(b)=\sqrt{9b+34}, q(-1)$ **79.** $t(a)=\sqrt{-15a-9}, t(-6)$ **80.** $f(a)=\sqrt{14a-36}, f(4)$

81. $g(x)=\sqrt{64-8x}, g(-3)$ **82.** $p(x)=\sqrt[3]{8x+9}, p(2)$ **83.** $h(x)=\sqrt[3]{9x^2+4}, h(4)$

84. $k(c)=\sqrt[4]{16c-5}, k(6)$ **85.** $f(x)=\sqrt[3]{-2x^2+x-6}, f(-3)$ **86.** $t(x)=\sqrt[4]{2x^3-3x^2+6x}, t(2)$

Resolución de problemas

87. Determine $f(81)$ si $f(x)=x+\sqrt{x}+7$.

88. Determine $g(25)$ si $g(x)=x^2+\sqrt{x}-13$.

89. Determine $t(18)$ si $t(x)=\frac{x}{2}+\sqrt{2x}-4$.

90. Determine $m(36)$ si $m(x)=\frac{x}{3}+\sqrt{4x}+10$.

91. Determine $k(8)$ si $k(x)=x^2+\sqrt{\frac{x}{2}}-21$.

92. Determine $r(45)$ si $r(x)=\frac{x}{9}+\sqrt{\frac{x}{5}}+13$.

93. Seleccione un valor para x, de modo que $\sqrt{(2x+1)^2}\neq 2x+1$.

94. Seleccione un valor para x, de modo que $\sqrt{(5x-3)^2}\neq 5x-3$.

95. ¿Para qué valores de x, será $\sqrt{(x-1)^2}=x-1$? Explique cómo determinó su respuesta.

96. ¿Para qué valores de x, será $\sqrt{(x+3)^2}=x+3$? Explique cómo determinó su respuesta.

97. ¿Para qué valores de x, será $\sqrt{(2x-6)^2}=2x-6$? Explique cómo determinó su respuesta.

98. ¿Para qué valores de x, será $\sqrt{(3x-8)^2}=3x-8$? Explique cómo determinó su respuesta.

99. a) ¿Para qué valores de a es $\sqrt{a^2}=|a|$?

b) ¿Para qué valores de a es $\sqrt{a^2}=a$?

c) ¿Para qué valores de a es $\sqrt[3]{a^3}=a$?

100. ¿En qué circunstancias la expresión $\sqrt[n]{x}$ no es un número real?

101. Explique por qué la expresión $\sqrt[n]{x^n}$ es un número real para cualquier número real x.

102. ¿En qué circunstancias la expresión $\sqrt[n]{x^m}$ no es un número real?

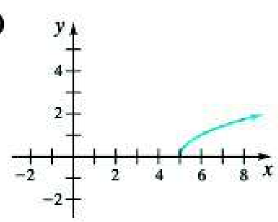
103. Determine el dominio de $\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x+5}}$. Explique cómo determinó su respuesta.

104. Determine el dominio de $\frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[6]{x+1}}$. Explique cómo determinó su respuesta.

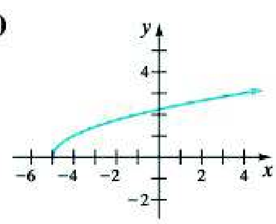
Considere los dominios de las funciones de los ejercicios 105 a 108, y relacione cada función con su gráfica correspondiente.

105. $f(x)=\sqrt{x}$ **106.** $f(x)=\sqrt{x^2}$ **107.** $f(x)=\sqrt{x-5}$ **108.** $f(x)=\sqrt{x+5}$

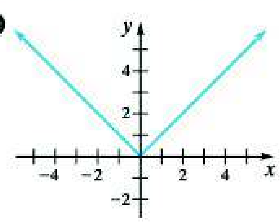
a)



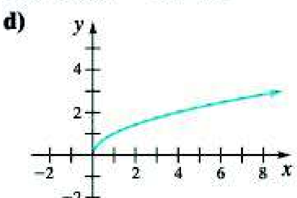
b)



c)



d)



109. Proporcione una función radical cuyo dominio sea $\{x|x \geq 8\}$.

110. Proporcione una función radical cuyo dominio sea $\{x|x \leq 5\}$.

111. Si $f(x) = -\sqrt{x}$, ¿puede $f(x)$ ser

a) mayor que 0,

b) igual a 0,

c) menor que 0?

Explique sus respuestas.

112. Si $f(x) = \sqrt{x + 5}$, ¿puede $f(x)$ ser

a) menor que 0,

b) igual a 0,

c) mayor que 0?

Explique sus respuestas.

113. Velocidad de un objeto La velocidad, V, que alcanza un objeto, en pies por segundo, después de que ha caído cierta distancia, h en pies, puede determinarse mediante la fórmula $V = \sqrt{64.4h}$. Una grúa de percusión cuenta con un gran mazo que se usa como martillo para enterrar pilotes en una superficie suave, a fin de que sirvan de soporte para edificios u otras estructuras.



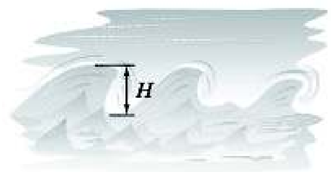
¿A qué velocidad golpeará el mazo al pilote si cae desde una altura de

a) 20 pies?

b) 40 pies?

114. Oleaje El instituto de oceanografía Scripps en La Jolla, California, desarrolló una fórmula para relacionar la velocidad del viento, u, en nudos, con la altura H, en pies, de las olas que se producen en ciertas áreas del océano. Esta fórmula es

$$u = \sqrt{\frac{H}{0.026}}$$



Si las olas que produce una tormenta alcanzan una altura de 15 pies, ¿cuál es la velocidad del viento?

115. Grafique $f(x) = \sqrt{x + 1}$.

116. Grafique $g(x) = -\sqrt{x}$.

117. Grafique $g(x) = \sqrt{x} + 1$.

118. Grafique $f(x) = \sqrt{x - 2}$.

Utilice su calculadora graficadora para resolver los ejercicios 119 a 124.

119. Compruebe la gráfica que trazó en el ejercicio 115.

120. Compruebe la gráfica que trazó en el ejercicio 117.

121. Determine si el dominio que dio en el ejercicio 103 es correcto.

122. Determine si el dominio que dio en el ejercicio 104 es correcto.

123. Grafique $y = \sqrt[3]{x + 4}$.

124. Grafique $f(x) = \sqrt[3]{2x - 3}$.

Actividad en grupo

En esta actividad determinarán las condiciones en que ciertas propiedades de los radicales son verdaderas. Estudiaremos estas propiedades más adelante en este capítulo. Analice y responda en grupo los ejercicios siguientes.

125. La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, denominada *propiedad de multiplicación para radicales*, es verdadera para ciertos números reales a y b. Por medio de sustitución de valores para a y b, determine en qué condiciones esta propiedad es verdadera.

126. La propiedad $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, denominada *propiedad de división para radicales*, es verdadera para ciertos números reales a y b. Por medio de sustitución de valores para a y b, determine en qué condiciones esta propiedad es verdadera.

Ejercicios de repaso acumulativo

Factorice.

[5.4] **127.** $9ax - 3bx + 12ay - 4by$

[5.5] **128.** $3x^3 - 18x^2 + 24x$

129. $8x^4 + 10x^2 - 3$

[5.6] **130.** $x^3 - \frac{8}{27}y^3$

7.2 Exponentes racionales

1 Convertir una expresión radical en una expresión exponencial.

2 Simplificar expresiones radicales.

3 Aplicar las reglas de los exponentes a los exponentes racionales y a los exponentes negativos.

4 Factorizar expresiones con exponentes racionales.

1 Convertir una expresión radical en una expresión exponencial

En esta sección analizaremos la conversión de las expresiones radicales en expresiones exponenciales, y viceversa. Cuando vea un exponente racional, debe darse cuenta que la expresión puede escribirse como una expresión con radical mediante el procedimiento siguiente.

Forma exponencial de $\sqrt[n]{a}$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Cuando a es un número no negativo, n puede ser cualquier índice.
Cuando a es un número negativo, n debe ser un número impar.

A menos que se indique lo contrario, en el resto de este capítulo supondremos que todas las variables en el radicando representan números reales no negativos, y que el radicando es un número no negativo. De esta manera no será necesario establecer que la variable es no negativa siempre que tengamos un radical con índice par. Esto nos permitirá escribir muchas respuestas sin signos de valor absoluto.

EJEMPLO 1 ▸ Escriba cada expresión en forma exponencial (con exponentes racionales).

a) $\sqrt{7}$ **b)** $\sqrt[3]{15ab}$ **c)** $\sqrt[7]{-4x^2y^5}$ **d)** $\sqrt[8]{\dfrac{5x^7}{2z^{11}}}$

Solución

a) $\sqrt{7} = 7^{1/2}$ *Recuerde que el índice de cualquier raíz cuadrada es 2.*

b) $\sqrt[3]{15ab} = (15ab)^{1/3}$ **c)** $\sqrt[7]{-4x^2y^5} = (-4x^2y^5)^{1/7}$ **d)** $\sqrt[8]{\dfrac{5x^7}{2z^{11}}} = \left(\dfrac{5x^7}{2z^{11}}\right)^{1/8}$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 19

Las expresiones exponenciales pueden convertirse en expresiones radicales invirtiendo el procedimiento.

EJEMPLO 2 ▸ Escriba cada expresión en forma radical (sin exponentes racionales).

a) $9^{1/2}$ **b)** $(-8)^{1/3}$ **c)** $y^{1/4}$ **d)** $(10x^2y)^{1/7}$ **e)** $5rs^{1/2}$

Solución

a) $9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$ **b)** $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

c) $y^{1/4} = \sqrt[4]{y}$ **d)** $(10x^2y)^{1/7} = \sqrt[7]{10x^2y}$ **e)** $5rs^{1/2} = 5r\sqrt{s}$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 33

2 Simplificar expresiones radicales

Podemos ampliar la regla anterior, de modo que los radicales con la forma $\sqrt[n]{a^m}$ puedan escribirse como expresiones exponenciales. Observe $a^{2/3}$. Podemos escribir $a^{2/3}$ como $(a^{1/3})^2$ o $(a^2)^{1/3}$. Esto sugiere que $a^{2/3} = (\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2}$.

Forma exponencial de $\sqrt[n]{a^m}$

Para cualquier número a no negativo, y enteros m y n,

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{m/n}$$

Potencia: m ← Índice: n

Podemos usar esta regla para cambiar una expresión de la forma radical a la forma exponencial, y viceversa. Cuando cambiamos una expresión radical a forma exponencial, la *potencia* se coloca en el *numerador* y el *índice o raíz* en el *denominador* del exponente racional. Así, por ejemplo, $\sqrt[3]{x^4}$ puede escribirse como $x^{4/3}$. También $(\sqrt[5]{y})^2$ puede escribirse como $y^{2/5}$. A continuación se dan algunos ejemplos más.

Ejemplos

$$\sqrt{y^3} = y^{3/2} \qquad \sqrt[3]{z^2} = z^{2/3} \qquad \sqrt[5]{2^8} = 2^{8/5}$$
$$(\sqrt{p})^3 = p^{3/2} \qquad (\sqrt[4]{x})^3 = x^{3/4} \qquad (\sqrt[4]{7})^3 = 7^{3/4}$$

De acuerdo con esta regla, para valores no negativos de la variable podemos escribir

$$\sqrt{x^5} = (\sqrt{x})^5 \qquad (\sqrt[4]{p})^3 = \sqrt[4]{p^3}$$

EJEMPLO 3 ▸ Escriba cada expresión en forma exponencial (con exponentes racionales) y después simplifique.

a) $\sqrt[4]{x^{12}}$ **b)** $(\sqrt[3]{y})^{15}$ **c)** $(\sqrt[6]{x})^{12}$

Solución

a) $\sqrt[4]{x^{12}} = x^{12/4} = x^3$ **b)** $(\sqrt[3]{y})^{15} = y^{15/3} = y^5$

c) $(\sqrt[6]{x})^{12} = x^{12/6} = x^2$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 45

Las expresiones exponenciales con exponentes racionales pueden convertirse en expresiones radicales invirtiendo el procedimiento. El *numerador* del exponente racional es la *potencia*, y el *denominador* del exponente racional es el *índice o raíz* de la expresión radical. Éstos son algunos ejemplos.

Ejemplos

$$x^{1/2} = \sqrt{x} \qquad 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$$
$$7^{2/3} = \sqrt[3]{7^2} \text{ o } (\sqrt[3]{7})^2 \qquad y^{3/10} = \sqrt[10]{y^3} \text{ o } (\sqrt[10]{y})^3$$
$$x^{9/5} = \sqrt[5]{x^9} \text{ o } (\sqrt[5]{x})^9 \qquad z^{10/3} = \sqrt[3]{z^{10}} \text{ o } (\sqrt[3]{z})^{10}$$

Observe que puede seleccionar, por ejemplo, escribir $6^{2/3}$ como $\sqrt[3]{6^2}$ o $(\sqrt[3]{6})^2$.

EJEMPLO 4 ▸ Escriba cada expresión en forma radical (sin exponentes racionales).

a) $x^{2/5}$ **b)** $(3ab)^{5/4}$

Solución

a) $x^{2/5} = \sqrt[5]{x^2}$ o $(\sqrt[5]{x})^2$ **b)** $(3ab)^{5/4} = \sqrt[4]{(3ab)^5}$ o $(\sqrt[4]{3ab})^5$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 35

EJEMPLO 5 ▸ Simplifique.

a) $4^{3/2}$ **b)** $\sqrt[6]{(49)^3}$ **c)** $\sqrt[4]{(xy)^{20}}$ **d)** $(\sqrt[15]{z})^5$

Solución

a) Algunas veces una expresión con un exponente racional puede simplificarse con más facilidad escribiéndola como un radical, como se ilustra.

$$\begin{aligned} 4^{3/2} &= (\sqrt{4})^3 && \text{Escribir como un radical.} \\ &= (2)^3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

b) A veces una expresión radical puede simplificarse con más facilidad escribiéndola con exponentes racionales, como se ilustra en las partes **b) a d)**.

$$\sqrt[6]{(49)^3} = 49^{3/6} \quad \text{Escribir con un exponente racional.}$$
$$= 49^{1/2} \quad \text{Reducir el exponente.}$$
$$= \sqrt{49} \quad \text{Escribirlo como un radical.}$$
$$= 7 \quad \text{Simplificar.}$$

c) $\sqrt[4]{(xy)^{20}} = (xy)^{20/4} = (xy)^5$

d) $(\sqrt[15]{z})^5 = z^{5/15} = z^{1/3}$ o $\sqrt[3]{z}$

Ahora resuelva el ejercicio 51

Veamos ahora la expresión $\sqrt[5]{x^5}$. Al escribirla en forma exponencial, se obtiene $x^{5/5} = x^1 = x$. Esto conduce a la regla siguiente.

Forma exponencial de $\sqrt[n]{a^n}$

Para cualquier número real no negativo a,

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a^{n/n} = a$$

En el recuadro anterior se especificaba que a era no negativo. Si n es un índice par y a es un número real negativo, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ y no a. Por ejemplo, $\sqrt[6]{(-5)^6} = |-5| = 5$. *De acuerdo con lo que se dijo antes en el sentido de que, a menos que se indique lo contrario, las variables en los radicandos representan números reales no negativos*, podemos escribir $\sqrt[6]{x^6} = x$ y no $|x|$. Esta suposición también nos permite escribir $\sqrt{x^2} = x$ y $(\sqrt[4]{z})^4 = z$.

Ejemplos

$\sqrt{3^2} = 3 \qquad \sqrt[4]{y^4} = y$

$\sqrt[6]{(xy)^6} = xy \qquad (\sqrt[5]{z})^5 = z$

3 Aplicar las reglas de los exponentes a los exponentes racionales y a los exponentes negativos

En la sección 1.5 se analizaron las reglas de los exponentes. En esa sección utilizamos como exponentes sólo números enteros no negativos. No obstante, éstas siguen siendo válidas cuando los exponentes son números racionales. Demos un repaso a dichas reglas.

Reglas de los exponentes

Para todos los números reales a y b y todos los números racionales m y n,

Regla del producto	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Regla del cociente	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$
Regla del exponente negativo	$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \quad a \neq 0$
Regla del exponente cero	$a^0 = 1, \quad a \neq 0$
Elevar una potencia a una potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Elevar un producto a una potencia	$(ab)^m = a^m b^m$
Elevar un cociente a una potencia	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad b \neq 0$

Ahora utilizaremos estas reglas para resolver algunos problemas donde los exponentes son números racionales.

EJEMPLO 6 Evalúe. **a)** $8^{-2/3}$ **b)** $(-27)^{-5/3}$ **c)** $(-32)^{-6/5}$

Solución

a) Comience por utilizar la regla del exponente negativo.

$$8^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} \quad \text{Regla del exponente negativo.}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2} \quad \text{Escribir el denominador como un radical.}$$

$$= \frac{1}{2^2} \quad \text{Simplificar el denominador.}$$

$$= \frac{1}{4}$$

b) $$(-27)^{-5/3} = \frac{1}{(-27)^{5/3}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{-27})^5} = \frac{1}{(-3)^5} = -\frac{1}{243}$$

c) $$(-32)^{-6/5} = \frac{1}{(-32)^{6/5}} = \frac{1}{(\sqrt[5]{-32})^6} = \frac{1}{(-2)^6} = \frac{1}{64}$$

Ahora resuelva el ejercicio 81

Observe que podríamos haber resuelto el ejemplo 6 **a)** como sigue:

$$8^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$$

Sin embargo, por lo general es más fácil evaluar la raíz antes de aplicar la potencia.

Considere la expresión $(-16)^{3/4}$; esta expresión puede reescribirse como $(\sqrt[4]{-16})^3$. Ya que $(\sqrt[4]{-16})^3$ no es un número real, la expresión $(-16)^{3/4}$ no es un número real.

En el capítulo 1 se mencionó que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

Utilizaremos esto en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7 Evalúe. **a)** $\left(\frac{9}{25}\right)^{-1/2}$ **b)** $\left(\frac{27}{8}\right)^{-1/3}$

Solución

a) $$\left(\frac{9}{25}\right)^{-1/2} = \left(\frac{25}{9}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

b) $$\left(\frac{27}{8}\right)^{-1/3} = \left(\frac{8}{27}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$$

Ahora resuelva el ejercicio 83

Sugerencia útil

¿En qué difieren las expresiones $-25^{1/2}$ y $(-25)^{1/2}$?
Recuerde que $-x^2$ significa $-(x^2)$. El mismo principio se aplica aquí.

$$-25^{1/2} = -(25)^{1/2} = -\sqrt{25} = -5$$

$(-25)^{1/2} = \sqrt{-25}$, el cual no es un número real.

EJEMPLO 8 Simplifique cada expresión y escriba la respuesta sin exponentes negativos.

a) $a^{1/2} \cdot a^{-2/3}$ **b)** $(6x^2y^{-4})^{-1/2}$ **c)** $3.2x^{1/3}(2.4x^{1/2} + x^{-1/4})$ **d)** $\left(\dfrac{9x^{-4}z^{2/5}}{z^{-3/5}}\right)^{1/8}$

Solución

a) $a^{1/2} \cdot a^{-2/3} = a^{(1/2)-(2/3)}$ *Regla del producto.*

$= a^{-1/6}$ *Determinar el MCD y restar los exponentes.*

$= \dfrac{1}{a^{1/6}}$ *Regla del exponente negativo.*

b) $(6x^2y^{-4})^{-1/2} = 6^{-1/2}x^{2(-1/2)}y^{-4(-1/2)}$ *Elevar el producto a una potencia.*

$= 6^{-1/2}x^{-1}y^2$ *Multiplicar los exponentes.*

$= \dfrac{y^2}{6^{1/2}x} \left(\text{o } \dfrac{y^2}{x\sqrt{6}}\right)$ *Regla del exponente negativo.*

c) Comience aplicando la propiedad distributiva.

$3.2x^{1/3}(2.4x^{1/2} + x^{-1/4}) = (3.2x^{1/3})(2.4x^{1/2}) + (3.2x^{1/3})(x^{-1/4})$ *Propiedad distributiva.*

$= (3.2)(2.4)(x^{(1/3)+(1/2)}) + 3.2x^{(1/3)-(1/4)}$ *Regla del producto.*

$= 7.68x^{5/6} + 3.2x^{1/12}$

d) $\left(\dfrac{9x^{-4}z^{2/5}}{z^{-3/5}}\right)^{1/8} = (9x^{-4}z^{(2/5)-(-3/5)})^{1/8}$ *Regla del cociente.*

$= (9x^{-4}z)^{1/8}$ *Restar los exponentes.*

$= 9^{1/8}x^{-4(1/8)}z^{1/8}$ *Elevar el producto a una potencia.*

$= 9^{1/8}x^{-4/8}z^{1/8}$ *Multiplicar los exponentes.*

$= 9^{1/8}x^{-1/2}z^{1/8}$ *Simplificar el exponente.*

$= \dfrac{9^{1/8}z^{1/8}}{x^{1/2}}$ *Regla del exponente negativo.*

Ahora resuelva el ejercicio 105

EJEMPLO 9 Simplifique. **a)** $\sqrt[15]{(7y)^5}$ **b)** $\left(\sqrt[4]{a^2b^3c}\right)^{20}$ **c)** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$

Solución

a) $\sqrt[15]{(7y)^5} = (7y)^{5/15}$ *Escribir con un exponente racional.*

$= (7y)^{1/3}$ *Simplificar el exponente.*

$= \sqrt[3]{7y}$ *Escribir como un radical.*

b) $\left(\sqrt[4]{a^2b^3c}\right)^{20} = (a^2b^3c)^{20/4}$ *Escribir con un exponente racional.*

$= (a^2b^3c)^5$

$= a^{10}b^{15}c^5$ *Elevar el producto a una potencia.*

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[4]{x^{1/3}}$ *Escribir $\sqrt[3]{x}$ como $x^{1/3}$.*

$= (x^{1/3})^{1/4}$ *Escribir con un exponente racional.*

$= x^{1/12}$ *Elevar la potencia a una potencia.*

$= \sqrt[12]{x}$ *Escribir como radical.*

Ahora resuelva el ejercicio 53

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA **Determinación de raíces o expresiones con exponentes racionales en una calculadora graficadora o en una calculadora científica**

En general hay muchas formas de evaluar una expresión como $(\sqrt[5]{845})^3$ u $845^{3/5}$ en una calculadora. El procedimiento varía según el modelo. Un método general consiste en escribir la expresión con un exponente racional y utilizar las teclas $\boxed{y^x}$ o $\boxed{a^x}$ o $\boxed{\wedge}$ junto con las teclas de paréntesis, como se muestra a continuación.*

Calculadora científica

Para evaluar $845^{3/5}$, presione

Respuesta que se obtiene

845 $\boxed{y^x}$ $\boxed{(}$ 3 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ 57.03139903

Para evaluar $845^{-3/5}$, presione

Respuesta que se obtiene

845 $\boxed{y^x}$ $\boxed{(}$ 3 $\boxed{+/-}$ $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ 0.017534201

Calculadora graficadora

Para evaluar $845^{3/5}$, presione las teclas siguientes.

Respuesta que se obtiene

845 $\boxed{\wedge}$ $\boxed{(}$ 3 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{)}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ 57.03139903

Para evaluar $845^{-3/5}$, presione las siguientes teclas.

Respuesta que se obtiene

845 $\boxed{\wedge}$ $\boxed{(}$ $\boxed{(-)}$ 3 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{)}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ .0175342008

*La secuencia de teclas que se utiliza varía según el modelo de cada calculadora. Lea el manual de su calculadora para aprender a evaluar expresiones exponenciales con ella.

4 Factorizar expresiones con exponentes racionales

En cursos de matemáticas de nivel superior quizá tenga que factorizar variables con exponentes racionales. Para factorizar una expresión racional, factorice el término con el exponente más pequeño (o más negativo).

EJEMPLO 10 Factorice $x^{2/5} + x^{-3/5}$.

Solución El más pequeño de los dos exponentes es $-3/5$. Por lo tanto, factorizaremos $x^{-3/5}$ en ambos términos. Para determinar el nuevo exponente en la variable que tenía el exponente más grande, restamos el exponente que se factorizó del exponente original.

Exponente original — Exponente factorizado

$$\begin{aligned} x^{2/5} + x^{-3/5} &= x^{-3/5}\left(x^{2/5-(-3/5)} + 1\right) \\ &= x^{-3/5}(x^1 + 1) \\ &= x^{-3/5}(x + 1) \\ &= \frac{x+1}{x^{3/5}} \end{aligned}$$

Podemos comprobar nuestra factorización por medio de la multiplicación.

$$\begin{aligned} x^{-3/5}(x+1) &= x^{-3/5}\cdot x + x^{-3/5}\cdot 1 \\ &= x^{(-3/5)+1} + x^{-3/5} \\ &= x^{2/5} + x^{-3/5} \end{aligned}$$

Como obtuvimos la expresión original, la factorización es correcta.

Ahora resuelva el ejercicio 135

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.2

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. a) ¿En qué condiciones $\sqrt[n]{a}$ es un número real?
   b) Cuando $\sqrt[n]{a}$ es un número real, ¿cómo puede expresarse con exponentes racionales?
2. a) ¿En qué condiciones $\sqrt[n]{a^m}$ es un número real?
   b) ¿En qué condiciones $(\sqrt[n]{a})^m$ es un número real?
   c) Cuando $\sqrt[n]{a^m}$ es un número real, ¿cómo puede expresarse con exponentes racionales?
3. a) ¿En qué condiciones $\sqrt[n]{a^n}$ es un número real?
   b) Cuando n es un número par y $a \geq 0$, ¿a qué es igual $\sqrt[n]{a^n}$?
   c) Cuando n es un número impar, ¿a qué es igual $\sqrt[n]{a^n}$?
   d) Cuando n es un número par y a es cualquier número real, ¿a qué es igual $\sqrt[n]{a^n}$?
4. a) Explique la diferencia entre $-16^{1/2}$ y $(-16)^{1/2}$.
   b) Evalúe cada expresión de la parte **a)**, si esto es posible.
5. a) ¿$(xy)^{1/2} = xy^{1/2}$? Explique.
   b) ¿Es $(xy)^{-1/2} = \dfrac{x^{1/2}}{y^{-1/2}}$? Explique.
6. a) ¿Es $\sqrt[6]{(3y)^3} = (3y)^{6/3}$? Explique.
   b) ¿Es $\sqrt{(ab)^4} = (ab)^2$? Explique.

Práctica de habilidades

En este conjunto de ejercicios supondremos que todas las variables representan números reales positivos. Escriba cada expresión en forma exponencial.

7. $\sqrt{a^3}$ **8.** $\sqrt{y^7}$ **9.** $\sqrt{9^5}$ **10.** $\sqrt[3]{y}$
11. $\sqrt[3]{z^5}$ **12.** $\sqrt[3]{x^{11}}$ **13.** $\sqrt[3]{7^{10}}$ **14.** $\sqrt[5]{9^{11}}$
15. $\sqrt[4]{9^7}$ **16.** $(\sqrt{x})^9$ **17.** $(\sqrt[3]{y})^{14}$ **18.** $\sqrt{ab^5}$
19. $\sqrt[4]{a^3b}$ **20.** $\sqrt[3]{x^4y}$ **21.** $\sqrt[4]{x^9z^5}$ **22.** $\sqrt[6]{y^{11}z}$
23. $\sqrt[6]{3a + 8b}$ **24.** $\sqrt[9]{3x + 5z^4}$ **25.** $\sqrt[5]{\dfrac{2x^6}{11y^7}}$ **26.** $\sqrt[4]{\dfrac{3a^8}{11b^5}}$

Escriba cada expresión en forma radical.

27. $a^{1/2}$ **28.** $b^{2/3}$ **29.** $c^{5/2}$ **30.** $19^{1/2}$
31. $18^{5/3}$ **32.** $y^{17/6}$ **33.** $(24x^3)^{1/2}$ **34.** $(85a^3)^{5/2}$
35. $(11b^2c)^{3/5}$ **36.** $(8x^3y^2)^{7/4}$ **37.** $(6a + 5b)^{1/5}$ **38.** $(8x^2 + 9y)^{7/3}$
39. $(b^3 - d)^{-1/3}$ **40.** $(7x^2 - 2y^3)^{-1/6}$

Simplifique cada expresión radical, cambiándola a forma exponencial. Cuando sea apropiado, escriba la respuesta en forma radical.

41. $\sqrt{a^6}$ **42.** $\sqrt[4]{a^8}$ **43.** $\sqrt[3]{x^9}$ **44.** $\sqrt[4]{x^{12}}$
45. $\sqrt[6]{y^2}$ **46.** $\sqrt[8]{b^4}$ **47.** $\sqrt[6]{y^3}$ **48.** $\sqrt[12]{z^4}$
49. $(\sqrt{19.3})^2$ **50.** $\sqrt[4]{(6.83)^4}$ **51.** $(\sqrt[3]{xy^2})^{15}$ **52.** $(\sqrt[4]{a^4bc^3})^{40}$
53. $(\sqrt[8]{xyz})^4$ **54.** $(\sqrt[9]{a^2bc^4})^3$ **55.** $\sqrt{\sqrt{x}}$ **56.** $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$
57. $\sqrt{\sqrt[4]{y}}$ **58.** $\sqrt[3]{\sqrt{b}}$ **59.** $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^2y}}$ **60.** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{7y}}$
61. $\sqrt{\sqrt[5]{a^9}}$ **62.** $\sqrt[5]{\sqrt[4]{ab}}$

Evalúe, si es posible. Si la expresión no es un número real, indíquelo.

63. $25^{1/2}$ **64.** $121^{1/2}$ **65.** $64^{1/3}$ **66.** $81^{1/4}$
67. $64^{2/3}$ **68.** $27^{2/3}$ **69.** $(-49)^{1/2}$ **70.** $(-64)^{1/4}$
71. $\left(\dfrac{25}{9}\right)^{1/2}$ **72.** $\left(\dfrac{100}{49}\right)^{1/2}$ **73.** $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{1/3}$ **74.** $\left(\dfrac{1}{32}\right)^{1/5}$
75. $-81^{1/2}$ **76.** $(-81)^{1/2}$ **77.** $-64^{1/3}$ **78.** $(-64)^{1/3}$
79. $64^{-1/3}$ **80.** $49^{-1/2}$ **81.** $16^{-3/2}$ **82.** $64^{-2/3}$
83. $\left(\dfrac{64}{27}\right)^{-1/3}$ **84.** $(-81)^{3/4}$ **85.** $(-100)^{3/2}$ **86.** $-\left(\dfrac{25}{49}\right)^{-1/2}$
87. $121^{1/2} + 169^{1/2}$ **88.** $49^{-1/2} + 36^{-1/2}$ **89.** $343^{-1/3} + 16^{-1/2}$ **90.** $16^{-1/2} - 256^{-3/4}$

Simplifique. Escriba la respuesta en forma exponencial sin exponentes negativos.

91. $x^4 \cdot x^{1/2}$ **92.** $x^6 \cdot x^{1/2}$ **93.** $\dfrac{x^{1/2}}{x^{1/3}}$ **94.** $x^{-6/5}$

95. $(x^{1/2})^{-2}$ **96.** $(a^{-1/3})^{-1/2}$ **97.** $(9^{-1/3})^0$ **98.** $\dfrac{x^4}{x^{-1/2}}$

99. $\dfrac{5y^{-1/3}}{60y^{-2}}$ **100.** $x^{-1/2}x^{-2/5}$ **101.** $4x^{5/3}3x^{-7/2}$ **102.** $(x^{-4/5})^{1/3}$

103. $\left(\dfrac{3}{24x}\right)^{1/3}$ **104.** $\left(\dfrac{52}{2x^4}\right)^{1/3}$ **105.** $\left(\dfrac{22x^{3/7}}{2x^{1/2}}\right)^2$ **106.** $\left(\dfrac{x^{-1/3}}{x^{-2}}\right)^2$

107. $\left(\dfrac{a^4}{4a^{-2/5}}\right)^{-3}$ **108.** $\left(\dfrac{27z^{1/4}y^3}{3z^{1/4}}\right)^{1/2}$ **109.** $\left(\dfrac{x^{3/4}y^{-3}}{x^{1/2}y^2}\right)^4$ **110.** $\left(\dfrac{250a^{-3/4}b^5}{2a^{-2}b^2}\right)^{2/3}$

Multiplique.

111. $4z^{-1/2}(2z^4 - z^{1/2})$ **112.** $-3a^{-4/9}(5a^{1/9} - a^2)$ **113.** $5x^{-1}(x^{-4} + 4x^{-1/2})$

114. $-9z^{3/2}(z^{3/2} - z^{-3/2})$ **115.** $-6x^{5/3}(-2x^{1/2} + 3x^{1/3})$ **116.** $\dfrac{1}{2}x^{-2}(10x^{4/3} - 38x^{-1/2})$

Utilice una calculadora para evaluar cada expresión. Redondee la respuesta al centésimo más cercano.

117. $\sqrt{180}$ **118.** $\sqrt[3]{168}$ **119.** $\sqrt[5]{402.83}$ **120.** $\sqrt[4]{1096}$

121. $93^{2/3}$ **122.** $38.2^{3/2}$ **123.** $1000^{-1/2}$ **124.** $8060^{-3/2}$

Resolución de problemas

125. ¿En qué condiciones se cumplirá $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$?

126. Elija valores para a y b para demostrar que $(a^2 + b^2)^{1/2}$ *no es igual a* $a + b$.

127. Elija valores para a y b para demostrar que $(a^{1/2} + b^{1/2})^2$ *no es igual* $a + b$.

128. Elija valores para a y b para demostrar que $(a^3 + b^3)^{1/3}$ *no es igual a* $a + b$.

129. Elija valores para a y b para demostrar que $(a^{1/3} + b^{1/3})^3$ *no es igual* $a + b$.

130. Determine si $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt[3]{x}}$, $x \geq 0$.

Factorice. Escriba la respuesta sin exponentes negativos.

131. $x^{3/2} + x^{1/2}$ **132.** $x^{1/4} - x^{5/4}$ **133.** $y^{1/3} - y^{7/3}$

134. $x^{-1/2} + x^{1/2}$ **135.** $y^{-2/5} + y^{8/5}$ **136.** $a^{6/5} + a^{-4/5}$

En los ejercicios 137 a 142, utilice una calculadora donde sea apropiado.

137. Cultivo de bacterias La función $B(t) = 2^{10} \cdot 2^t$, sirve para aproximar el número de bacterias que hay en cultivo después de t horas.

a) El número inicial de bacterias se determinó cuando $t = 0$. ¿Cuál es el número inicial de bacterias?

b) ¿Cuántas bacterias hay después de $\dfrac{1}{2}$ hora?

138. Determinación de antigüedad Los científicos emplean un método denominado "fechado con carbono" para determinar la antigüedad de fósiles, huesos y otros objetos. La fórmula que se usa es $P = P_0 2^{-t/5600}$, donde P_0 representa la cantidad original de carbono 14 (C_{14}) presente en un objeto, y P representa la cantidad de C_{14} que hay en él después de t años. Si en un hueso de un animal recientemente desenterrado están presentes 10 mg de C_{14}, ¿cuántos mg estarán presentes dentro de 5000 años?

139. Planes de retiro Cada año es mayor el número de estadounidenses que contribuyen al plan de retiro denominado 401(k). El total de activos, $A(t)$, de los planes 401(k), en miles de millones de dólares, puede aproximarse mediante la función $A(t) = 2.69t^{3/2}$, donde t es años desde 1993, y $1 \leq t \leq 16$. (Por lo tanto, esta función aplica para los años 1994 a 2009.) Estime el total de activos que habrá en los planes 401(k) en **a)** 2000 y **b)** 2009.

140. Ventas por Internet Las ventas por Internet han aumentado cada año. La cantidad total, $I(t)$, en miles de millones de dólares, de ventas realizadas por Internet, puede aproximarse mediante la función $I(t) = 0.25t^{5/3}$, donde t son los años desde 1999, y $1 \leq t \leq 9$. Determine la cantidad total en ventas realizadas por Internet en **a)** 2000 y **b)** 2008.



141. Evalúe $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$. Explique cómo determinó su respuesta.

142. **a)** Evalúe en su calculadora 3^{π}.
b) Explique por qué el valor que indicó en la parte **a)** tiene sentido o no.

143. Determine el dominio de $f(x) = (x - 7)^{1/2}(x + 3)^{-1/2}$.

144. Determine el dominio de $f(x) = (x + 4)^{1/2}(x - 3)^{-1/2}$.

145. Suponga que x puede ser cualquier número real. Simplifique $\sqrt[n]{(x - 6)^{2n}}$
a) n es un número par.
b) n es un número impar.

Determine el índice que debe colocarse en el área sombreada para que la expresión sea verdadera. Explique cómo determinó su respuesta.

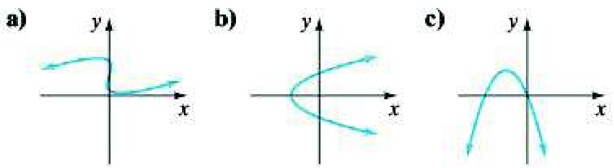
146. $\sqrt[4]{\sqrt[\square]{\sqrt{x}}} = x^{1/24}$

147. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt[\square]{\sqrt[3]{z}}}} = z^{1/120}$

148. **a)** Escriba $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ en forma exponencial.
b) Utilizando su calculadora graficadora, compruebe que la respuesta que dio en la parte **a)** es correcta; para ello, grafique $f(x)$ tanto en su forma original como en la forma exponencial que usted determinó.

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.2] **149.** Determine cuáles de las relaciones siguientes también son funciones.



[6.3] **150.** Simplifique $\dfrac{a^{-2} + ab^{-1}}{ab^{-2} - a^{-2}b^{-1}}$.

[6.4] **151.** Resuelva la ecuación $\dfrac{3x - 2}{x + 4} = \dfrac{2x + 1}{3x - 2}$.

[6.5] **152.** **Piloteando un avión** Amy Mayfiel puede pilotear su aeroplano en un trayecto de 500 millas con el viento en contra, en el mismo tiempo que le toma pilotearlo en un trayecto de 560 millas con el viento a favor. Si el viento sopla a 25 millas por hora, determine la velocidad del aeroplano con viento en calma.

7.3 Simplificación de radicales

1 Entender potencias perfectas.
2 Simplificar radicales mediante la regla del producto para radicales.
3 Simplificar radicales mediante la regla del cociente para radicales.

1 Entender potencias perfectas

En esta sección simplificaremos radicales mediante la **regla del producto para radicales** y la **regla del cociente para radicales**, pero antes se presentará un concepto que nos ayudará a comprenderlas: las **potencias perfectas**.

Un número o expresión es un **cuadrado perfecto** si es el cuadrado de una expresión. Los siguientes son ejemplos de cuadrados perfectos.

Cuadrados perfectos	1,	4,	9,	16,	25,	36, . . .
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Cuadrado de un número	1^2,	2^2,	3^2,	4^2,	5^2,	6^2, . . .

Tal como se ilustra a continuación, las variables con exponentes también pueden ser cuadrados perfectos.

Cuadrados perfectos	x^2,	x^4,	x^6,	x^8,	x^{10}, . . .
	↓	↓	↓	↓	↓
Cuadrado de una expresión	$(x)^2$,	$(x^2)^2$,	$(x^3)^2$,	$(x^4)^2$,	$(x^5)^2$, . . .

Observe que todos los exponentes de las variables de los cuadrados perfectos son múltiplos de 2.

Al igual que existen cuadrados perfectos, también hay cubos perfectos. Un número o expresión es un **cubo perfecto** si puede escribirse como el cubo de una expresión. Los siguientes son algunos ejemplos.

Cubos perfectos	1,	8,	27,	64,	125,	216, . . .
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Cubo de un número	1^3,	2^3,	3^3,	4^3,	5^3,	6^3, . . .

Cubos perfectos	x^3,	x^6,	x^9,	x^{12},	x^{15}, . . .
	↓	↓	↓	↓	↓
Cubo de una expresión	$(x)^3$,	$(x^2)^3$,	$(x^3)^3$,	$(x^4)^3$,	$(x^5)^3$, . . .

Observe que todos los exponentes de las variables de los cubos perfectos son múltiplos de 3.

Podemos ampliar nuestro análisis respecto de potencias perfectas de una variable para cualquier radicando. En general, el radicando x^n es una potencia perfecta *cuando n es un múltiplo del índice* del radicando (o donde n es divisible entre el índice).

Ejemplo

Potencias perfectas de x^n para el índice n $\quad x^n, \quad x^{2n}, \quad x^{3n}, \quad x^{4n}, \quad x^{5n}, \ldots$

Por ejemplo, si el índice de una expresión radical es 5, entonces $x^5, x^{10}, x^{15}, x^{20}$, etcétera, son potencias perfectas del índice.

Sugerencia útil

Un método rápido para saber si un radicando x^n es una potencia perfecta para un índice, consiste en determinar si el exponente n es divisible entre el índice del radical. Por ejemplo, en $\sqrt[5]{x^{20}}$. Como el exponente, 20, es divisible entre el índice, 5, x^{20} es una quinta potencia perfecta. En cambio, en $\sqrt[6]{x^{20}}$. El exponente, 20, no es divisible entre el índice, 6; entonces, x^{20} no es una sexta potencia perfecta. Sin embargo, x^{18} y x^{24} sí lo son, ya que 6 divide a 18 y a 24.

Observe que la raíz cuadrada de un cuadrado perfecto se simplifica a una expresión sin signo radical; la raíz cúbica de un cubo perfecto se simplifica a una expresión sin signo radical, y así sucesivamente.

Ejemplos

$$\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6^{2/2} = 6$$
$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{3/3} = 3$$
$$\sqrt{x^6} = x^{6/2} = x^3$$
$$\sqrt[3]{z^{12}} = z^{12/3} = z^4$$
$$\sqrt[5]{n^{35}} = n^{35/5} = n^7$$

Estamos listos para analizar la regla del producto para radicales.

2 Simplificar radicales mediante la regla del producto para radicales

Para introducir la **regla del producto para radicales**, observe que $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$. También $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$. Vemos que $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9}$. Éste es un ejemplo de la regla del producto para radicales.

Regla del producto para radicales

Para números reales no negativos a y b,

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Ejemplos de la regla del producto para radicales

$$\sqrt{20} = \begin{cases} \sqrt{1} \cdot \sqrt{20} \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} \\ \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \end{cases} \qquad \sqrt[3]{20} = \begin{cases} \sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{20} \\ \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{10} \\ \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5} \end{cases}$$

$\sqrt{20}$ puede factorizarse en cualquiera de estas formas.

$\sqrt[3]{20}$ puede factorizarse en cualquiera de estas formas.

$$\sqrt{x^7} = \begin{cases} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^6} \\ \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^5} \\ \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x^4} \end{cases} \qquad \sqrt[3]{x^7} = \begin{cases} \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^6} \\ \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^5} \\ \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^4} \end{cases}$$

$\sqrt{x^7}$ puede factorizarse en cualquiera de estas formas.

$\sqrt[3]{x^7}$ puede factorizarse en cualquiera de estas formas.

Ahora que conocemos la regla del producto para radicales, la usaremos para simplificar radicales. A continuación mostramos un procedimiento general que puede usarse para simplificar radicales mediante la regla del producto.

Para simplificar radicales mediante la regla del producto

1. Si el radicando contiene un coeficiente distinto de 1, escríbalo como el producto de dos números, uno de los cuales es la máxima potencia perfecta del índice.
2. Escriba cada factor variable como el producto de dos factores, donde uno de los cuales sea la máxima potencia perfecta de la variable del índice.
3. Utilice la regla del producto para escribir la expresión radical como un producto de radicales. Coloque todas las potencias perfectas (números y variables) bajo el mismo radical.
4. Simplifique el radical que contiene las potencias perfectas.

Si simplificamos una *raíz cuadrada*, debemos escribir el radicando como el producto del *cuadrado perfecto* más grande por otro número. Si simplificamos una raíz *cúbica*, debemos escribir el radicando como el producto del *cubo perfecto* más grande por otro número, y así sucesivamente.

EJEMPLO 1 Simplifique. **a)** $\sqrt{32}$ **b)** $\sqrt{60}$ **c)** $\sqrt[3]{54}$ **d)** $\sqrt[4]{96}$

Solución En este ejemplo, los radicandos no tienen variables. Seguiremos el paso 1 del procedimiento.

a) Como estamos evaluando una raíz cuadrada, buscamos el cuadrado perfecto más grande que divida a (o sea un factor de) 32, en este caso, 16.

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

b) El cuadrado perfecto más grande que es factor de 60 es 4.

$$\sqrt{60} = \sqrt{4 \cdot 15} = \sqrt{4}\sqrt{15} = 2\sqrt{15}$$

c) El cubo perfecto más grande que es factor de 54 es 27.

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$$

d) La cuarta potencia perfecta más grande que es factor de 96 es 16.

$$\sqrt[4]{96} = \sqrt[4]{16 \cdot 6} = \sqrt[4]{16}\sqrt[4]{6} = 2\sqrt[4]{6}$$

Ahora resuelva el ejercicio 19

Sugerencia útil

En el ejemplo 1 **a)**, si primero pensó que 4 era el cuadrado perfecto más grande que dividía a 32, podría proceder como sigue

$$\sqrt{32} = \sqrt{4 \cdot 8} = \sqrt{4}\sqrt{8} = 2\sqrt{8}$$
$$= 2\sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{4}\sqrt{2} = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Observe que el resultado final es el mismo, pero debe realizar más pasos. La explicación de potencias perfectas de la página 465 puede ayudarle a determinar el cuadrado perfecto o el cubo perfecto más grandes que son factores de un radicando.

El ejemplo 1 **b)** también $\sqrt{15}$ puede tener factores como $\sqrt{5 \cdot 3}$; sin embargo, como ni 5 ni 3 son cuadrados perfectos, $\sqrt{15}$ no puede simplificarse.

Cuando el radicando es una potencia perfecta del índice, el radical puede simplificarse escribiéndolo en forma exponencial, como en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Simplifique. **a)** $\sqrt{x^4}$ **b)** $\sqrt[3]{x^{12}}$ **c)** $\sqrt[5]{z^{40}}$

Solución

a) $\sqrt{x^4} = x^{4/2} = x^2$ **b)** $\sqrt[3]{x^{12}} = x^{12/3} = x^4$ **c)** $\sqrt[5]{z^{40}} = z^{40/5} = z^8$

Ahora resuelva el ejercicio 33

EJEMPLO 3 Simplifique. **a)** $\sqrt{x^9}$ **b)** $\sqrt[5]{x^{23}}$ **c)** $\sqrt[4]{y^{33}}$

Solución Como los radicandos tienen coeficiente 1, iniciamos con el paso 2 del procedimiento.

a) El cuadrado perfecto más grande menor o igual a x^9 es x^8.

$$\sqrt{x^9} = \sqrt{x^8 \cdot x} = \sqrt{x^8} \cdot \sqrt{x} = x^{8/2}\sqrt{x} = x^4\sqrt{x}$$

b) La quinta potencia perfecta más grande menor o igual a x^{23} es x^{20}.

$$\sqrt[5]{x^{23}} = \sqrt[5]{x^{20} \cdot x^3} = \sqrt[5]{x^{20}}\,\sqrt[5]{x^3} = x^{20/5}\sqrt[5]{x^3} = x^4\sqrt[5]{x^3}$$

c) La cuarta potencia más grande menor o igual a y^{33} es y^{32}.

$$\sqrt[4]{y^{33}} = \sqrt[4]{y^{32} \cdot y} = \sqrt[4]{y^{32}}\,\sqrt[4]{y} = y^{32/4}\sqrt[4]{y} = y^8\sqrt[4]{y}$$

Ahora resuelva el ejercicio 39

Si observa las respuestas al ejemplo 3, verá que el exponente de la variable del radicando siempre es menor que el índice. **Cuando un radical se simplifica, el radicando no tiene una variable con un exponente mayor o igual al índice.**

En el ejemplo 3 **b)** simplificamos $\sqrt[5]{x^{23}}$. Si dividimos 23, el exponente en el radicando, entre 5, el índice, obtenemos

$$\begin{array}{r l} 4 & \leftarrow \text{Cociente} \\ 5\overline{)23} & \\ \underline{20} & \\ 3 & \leftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

Observe que $\sqrt[5]{x^{23}}$ se simplifica a $x^4\sqrt[5]{x^3}$ y

$$\text{Cociente} \longrightarrow x^4\sqrt[5]{x^3} \longleftarrow \text{Residuo}$$

Cuando simplificamos un radical, si dividimos el exponente dentro del radical entre el índice, el cociente será el exponente de la variable fuera del signo radical, y el residuo será el exponente de la variable dentro del signo radical. Ahora, simplifique el ejemplo 3 **c)** mediante esta técnica.

EJEMPLO 4 Simplifique. **a)** $\sqrt{x^{12}y^{17}}$ **b)** $\sqrt[4]{x^6y^{23}}$

Solución

a) x^{12} es un cuadrado perfecto. El cuadrado perfecto más grande que es factor de y^{17} es y^{16}. Escriba y^{17} como $y^{16} \cdot y$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^{12}y^{17}} = \sqrt{x^{12} \cdot y^{16} \cdot y} &= \sqrt{x^{12}y^{16}}\,\sqrt{y} \\ &= \sqrt{x^{12}}\sqrt{y^{16}}\,\sqrt{y} \\ &= x^{12/2}y^{16/2}\sqrt{y} \\ &= x^6y^8\sqrt{y}\end{aligned}$$

b) Empezamos por encontrar la cuarta potencia perfecta más grande que sea factor de x^6 y y^{23}. Para un índice de 4, la potencia perfecta más grande que es factor de x^6 es x^4. La potencia perfecta más grande que es factor de y^{23} es y^{20}.

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{x^6y^{23}} &= \sqrt[4]{x^4 \cdot x^2 \cdot y^{20} \cdot y^3} \\ &= \sqrt[4]{x^4y^{20} \cdot x^2y^3} \\ &= \sqrt[4]{x^4y^{20}}\,\sqrt[4]{x^2y^3} \\ &= xy^5\sqrt[4]{x^2y^3}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 51

Con frecuencia los pasos donde cambiamos la expresión radical a forma exponencial se realizan de forma mental y, por lo tanto, esos pasos no se ilustran. Por ejemplo, en el ejemplo 4 **b)** cambiamos $\sqrt[4]{x^4y^{20}}$ a xy^5 mentalmente, así que no se mostraron los pasos intermedios.

EJEMPLO 5 Simplifique. **a)** $\sqrt{80x^5y^{12}z^3}$ **b)** $\sqrt[3]{54x^{17}y^{25}}$

Solución

a) El cuadrado perfecto más grande que es factor de 80 es 16. El cuadrado perfecto más grande que es un factor de x^5 es x^4. La expresión y^{12} es un cuadrado perfecto. El cuadrado perfecto más grande que es factor de z^3 es z^2. Coloque todos los cuadrados perfectos bajo el mismo radical y luego simplifique.

$$\begin{aligned}\sqrt{80x^5y^{12}z^3} &= \sqrt{16\cdot 5\cdot x^4\cdot x\cdot y^{12}\cdot z^2\cdot z}\\ &= \sqrt{16x^4y^{12}z^2\cdot 5xz}\\ &= \sqrt{16x^4y^{12}z^2}\cdot\sqrt{5xz}\\ &= 4x^2y^6z\sqrt{5xz}\end{aligned}$$

b) El cubo perfecto más grande que es factor de 54 es 27. El cubo perfecto más grande que es factor de x^{17} es x^{15}. El cubo perfecto más grande que es factor de y^{25} es y^{24}.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{54x^{17}y^{25}} &= \sqrt[3]{27\cdot 2\cdot x^{15}\cdot x^2\cdot y^{24}\cdot y}\\ &= \sqrt[3]{27x^{15}y^{24}\cdot 2x^2y}\\ &= \sqrt[3]{27x^{15}y^{24}}\cdot\sqrt[3]{2x^2y}\\ &= 3x^5y^8\sqrt[3]{2x^2y}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 57

Sugerencia útil

En el ejemplo 4 **b)**, mostramos que

$$\sqrt[4]{x^6y^{23}} = xy^5\sqrt[4]{x^2y^3}$$

Como se mencionó en la página 468, este radical también puede simplificarse dividiendo los exponentes de las variables dentro del radicando, 6 y 23, entre el índice, 4, y observando los cocientes y los residuos.

Cociente	Cociente	Residuo	Residuo
$6 \div 4$	$23 \div 4$	$6 \div 4$	$23 \div 4$

$$\sqrt[4]{x^6y^{23}} = x^1y^5\sqrt[4]{x^2y^3}$$

¿Puede explicar por qué este procedimiento también funciona? Tal vez quiera usar este procedimiento para resolver o comprobar ciertos problemas.

A continuación se presentan las reglas del cociente para radicales.

3 Simplificar radicales mediante la regla del cociente para radicales

A veces en matemáticas es necesario simplificar un cociente de dos radicales; para hacerlo se utiliza la **regla del cociente para radicales**.

Regla del cociente para radicales

Para números reales no negativos a y b,

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},\quad b \neq 0$$

Ejemplos de la regla del cociente para radicales

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{18}{3}} \qquad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$$

$$\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x^3}{x}} \qquad \sqrt{\frac{x^4}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{y^2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{y^5}}{\sqrt[3]{y^2}} = \sqrt[3]{\frac{y^5}{y^2}} \qquad \sqrt[3]{\frac{z^9}{27}} = \frac{\sqrt[3]{z^9}}{\sqrt[3]{27}}$$

Los ejemplos 6 y 7 ilustran cómo utilizar la regla del cociente para simplificar expresiones radicales.

EJEMPLO 6 Simplifique. **a)** $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{\sqrt[3]{24x}}{\sqrt[3]{3x}}$ **c)** $\frac{\sqrt[3]{x^4y^7}}{\sqrt[3]{xy^{-5}}}$

Solución En cada parte utilizamos la regla del cociente para escribir el cociente de radicales como un solo radical. Luego simplificamos.

a) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$

b) $\frac{\sqrt[3]{24x}}{\sqrt[3]{3x}} = \sqrt[3]{\frac{24x}{3x}} = \sqrt[3]{8} = 2$

c) $\frac{\sqrt[3]{x^4y^7}}{\sqrt[3]{xy^{-5}}} = \sqrt[3]{\frac{x^4y^7}{xy^{-5}}}$ *Regla del cociente para radicales.*

$= \sqrt[3]{x^3y^{12}}$ *Simplificar el radicando.*

$= xy^4$

Ahora resuelva el ejercicio 93

Cuando se presentaron los radicales en la sección 7.1, se indicó que $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ ya que $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. La regla del cociente puede ser útil en la evaluación de raíces cuadradas que tienen fracciones, como se ilustra en el ejemplo 7 **a)**.

EJEMPLO 7 Simplifique. **a)** $\sqrt{\frac{121}{25}}$ **b)** $\sqrt[3]{\frac{8x^4y}{27xy^{10}}}$ **c)** $\sqrt[4]{\frac{18xy^5}{3x^9y}}$

Solución En cada parte, primero simplificamos el radicando, si esto es posible. Luego utilizamos la regla del cociente para escribir el radical dado como cociente de radicales.

a) $\sqrt{\frac{121}{25}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$

b) $\sqrt[3]{\frac{8x^4y}{27xy^{10}}} = \sqrt[3]{\frac{8x^3}{27y^9}} = \frac{\sqrt[3]{8x^3}}{\sqrt[3]{27y^9}} = \frac{2x}{3y^3}$

c) $\sqrt[4]{\frac{18xy^5}{3x^9y}} = \sqrt[4]{\frac{6y^4}{x^8}} = \frac{\sqrt[4]{6y^4}}{\sqrt[4]{x^8}} = \frac{\sqrt[4]{y^4}\sqrt[4]{6}}{x^2} = \frac{y\sqrt[4]{6}}{x^2}$

Ahora resuelva el ejercicio 97

Cómo evitar errores comunes

Las simplificaciones siguientes son correctas, ya que los números y variables cancelados no están dentro de raíces cuadradas.

CORRECTO: $\frac{\overset{2}{\cancel{6}}\sqrt{2}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 2\sqrt{2}$

CORRECTO: $\frac{\cancel{x}\sqrt{2}}{\cancel{x}} = \sqrt{2}$

Cuando una expresión está dentro de una raíz cuadrada, no puede dividirse entre una expresión que está fuera de ella.

CORRECTO:

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ *No puede simplificarse más*

$\frac{\sqrt{x^3}}{x} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{x}}{x} = \frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}} = \sqrt{x}$

INCORRECTO:

$\frac{\sqrt{\cancel{2}^1}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{1} = 1$

$\frac{\sqrt{x^{\cancel{3}\,2}}}{\cancel{x}} = \sqrt{x^2} = x$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.3

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. a) ¿Cómo se obtienen los números que son cuadrados perfectos?
   b) Liste los primeros seis cuadrados perfectos.
2. a) ¿Cómo se obtienen los números que son cubos perfectos?
   b) Liste los primeros seis cubos perfectos.
3. a) ¿Cómo se obtienen números que sean quintas potencias perfectas?
   b) Liste los primeros cinco números que son quintas potencias perfectas.
4. Establezca la regla del producto para radicales.
5. Cuando proporcionamos la regla del producto, mencionamos que para números reales no negativos a y b, $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. ¿Por qué es necesario especificar que a y b son números reales no negativos?
6. Establezca, con sus propias palabras, la regla del cociente para radicales.
7. Al establecer la regla del cociente, mencionamos que para números reales no negativos a y b, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b \neq 0$. ¿Por qué es necesario especificar que a y b son números reales no negativos?
8. En la regla del cociente que se analizó en el ejercicio 7, ¿por qué el denominador nunca puede ser igual a cero?

Práctica de habilidades

En este conjunto de ejercicios, suponga que todas las variables representan números reales positivos.

Simplifique.

9. $\sqrt{8}$	10. $\sqrt{28}$	11. $\sqrt{24}$	12. $\sqrt{18}$
13. $\sqrt{32}$	14. $\sqrt{12}$	15. $\sqrt{50}$	16. $\sqrt{72}$
17. $\sqrt{75}$	18. $\sqrt{300}$	19. $\sqrt{40}$	20. $\sqrt{600}$
21. $\sqrt[3]{16}$	22. $\sqrt[3]{24}$	23. $\sqrt[3]{54}$	24. $\sqrt[3]{81}$
25. $\sqrt[3]{32}$	26. $\sqrt[3]{108}$	27. $\sqrt[3]{40}$	28. $\sqrt[4]{80}$
29. $\sqrt[4]{48}$	30. $\sqrt[4]{162}$	31. $-\sqrt[5]{64}$	32. $-\sqrt[5]{243}$
33. $\sqrt[3]{b^9}$	34. $6\sqrt{y^{12}}$	35. $\sqrt[3]{x^6}$	36. $\sqrt[5]{y^{20}}$
37. $\sqrt{x^3}$	38. $-\sqrt{x^5}$	39. $\sqrt{a^{11}}$	40. $\sqrt[3]{b^{13}}$
41. $8\sqrt[3]{z^{32}}$	42. $\sqrt[3]{a^7}$	43. $\sqrt[4]{b^{23}}$	44. $\sqrt[5]{z^7}$
45. $\sqrt[6]{x^9}$	46. $\sqrt[7]{y^{15}}$	47. $3\sqrt[5]{y^{23}}$	48. $\sqrt{24x^3}$
49. $2\sqrt{50y^9}$	50. $\sqrt{75a^7b^{11}}$	51. $\sqrt[3]{x^3y^7}$	52. $\sqrt{x^5y^9}$
53. $\sqrt[5]{a^6b^{23}}$	54. $-\sqrt{20x^6y^7z^{12}}$	55. $\sqrt{24x^{15}y^{20}z^{27}}$	56. $\sqrt[3]{16x^3y^6}$
57. $\sqrt[3]{81a^6b^8}$	58. $\sqrt[3]{128a^{10}b^{11}c^{12}}$	59. $\sqrt[4]{32x^8y^9z^{19}}$	60. $\sqrt[4]{48x^{11}y^{21}}$
61. $\sqrt[4]{81a^8b^9}$	62. $-\sqrt[4]{32x^{18}y^{31}}$	63. $\sqrt[5]{32a^{10}b^{12}}$	64. $\sqrt[6]{64x^{12}y^{23}z^{50}}$

Simplifique.

65. $\sqrt{\frac{75}{3}}$ **66.** $\sqrt{\frac{36}{4}}$ **67.** $\sqrt{\frac{81}{100}}$ **68.** $\sqrt{\frac{8}{50}}$

69. $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ **70.** $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ **71.** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$ **72.** $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{60}}$

73. $\sqrt[3]{\frac{3}{24}}$ **74.** $\sqrt[3]{\frac{2}{54}}$ **75.** $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$ **76.** $\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}}$

77. $\sqrt[4]{\frac{3}{48}}$ **78.** $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$ **79.** $\sqrt[5]{\frac{96}{3}}$ **80.** $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{64}}$

81. $\sqrt{\frac{r^4}{4}}$ **82.** $\sqrt{\frac{100a^8}{49b^6}}$ **83.** $\sqrt{\frac{16x^4}{25y^{10}}}$ **84.** $\sqrt{\frac{49a^8b^{10}}{121c^{14}}}$

85. $\sqrt[3]{\frac{c^6}{64}}$ **86.** $\sqrt[3]{\frac{27x^6}{y^{12}}}$ **87.** $\sqrt[3]{\frac{a^8b^{12}}{b^{-8}}}$ **88.** $\sqrt[4]{\frac{16x^{16}y^{32}}{81x^{-4}}}$

89. $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}$ **90.** $\frac{\sqrt{64x^5}}{\sqrt{2x^3}}$ **91.** $\frac{\sqrt{27x^6}}{\sqrt{3x^2}}$ **92.** $\frac{\sqrt{72x^3y^5}}{\sqrt{8x^3y^7}}$

93. $\frac{\sqrt{48x^6y^9}}{\sqrt{6x^2y^6}}$ **94.** $\frac{\sqrt{300a^{10}b^{11}}}{\sqrt{2ab^4}}$ **95.** $\sqrt[3]{\frac{5xy}{8x^{13}}}$ **96.** $\sqrt[3]{\frac{64a^5b^{12}}{27a^{14}b^5}}$

97. $\sqrt[3]{\frac{25x^2y^9}{5x^8y^2}}$ **98.** $\sqrt[3]{\frac{54xy^4z^{17}}{18x^{13}z^4}}$ **99.** $\sqrt[4]{\frac{10x^4y}{81x^{-8}}}$ **100.** $\sqrt[4]{\frac{3a^6b^5}{16a^{-6}b^{13}}}$

Resolución de problemas

101. Pruebe que $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ convirtiendo $\sqrt{a \cdot b}$ a forma exponencial.

102. El producto de dos radicales, ¿siempre será un radical? Proporcione un ejemplo para apoyar su respuesta.

103. El cociente de dos radicales, ¿siempre será un radical? Proporcione un ejemplo para apoyar su respuesta.

104. Pruebe que $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ convirtiendo $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ a forma exponencial.

105. **a)** La expresión $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}$ ¿siempre será igual a 1?

b) Si su respuesta a la parte **a)** fue no, ¿en qué condiciones $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}$ será igual a 1?

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **106.** Despeje C de la fórmula $F = \frac{9}{5}C + 32$.

[2.6] **107.** Resuelva para x: $\left|\frac{2x-4}{5}\right| = 12$

[5.3] **108.** Divida $\frac{15x^{12} - 5x^9 + 20x^6}{5x^6}$.

[5.6] **109.** Factorice $(x-3)^3 + 8$.

7.4 Suma, resta y multiplicación de radicales

1 Sumar y restar radicales.

2 Multiplicar radicales.

1 Sumar y restar radicales

Los **radicales semejantes** son aquellos que tienen el mismo radicando y el mismo índice. Los **radicales no semejantes** son los que difieren en el radicando o en el índice.

Ejemplos de radicales semejantes	Ejemplos de radicales no semejantes	
$\sqrt{5}, 3\sqrt{5}$	$\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}$	Los índices difieren.
$6\sqrt{7}, -2\sqrt{7}$	$\sqrt{6}, \sqrt{7}$	Los radicandos difieren.
$\sqrt{x}, 5\sqrt{x}$	$\sqrt{x}, \sqrt{2x}$	Los radicandos difieren.
$\sqrt[3]{2x}, -4\sqrt[3]{2x}$	$\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$	Los índices difieren.
$\sqrt[4]{x^2y^5}, -\sqrt[4]{x^2y^5}$	$\sqrt[3]{xy}, \sqrt[3]{x^2y}$	Los radicandos difieren.

Los radicales semejantes se suman y restan de manera similar a como se suman y restan los términos semejantes. Para sumar o restar radicales semejantes, se suman o restan sus coeficientes numéricos y se multiplica el resultado por el radical semejante.

Ejemplos de sumas y restas de radicales semejantes

$$3\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = (3 + 2)\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$
$$5\sqrt{x} - 7\sqrt{x} = (5 - 7)\sqrt{x} = -2\sqrt{x}$$
$$\sqrt[3]{4x^2} + 5\sqrt[3]{4x^2} = (1 + 5)\sqrt[3]{4x^2} = 6\sqrt[3]{4x^2}$$
$$4\sqrt{5x} - y\sqrt{5x} = (4 - y)\sqrt{5x}$$

EJEMPLO 1 ▸ Simplifique.

a) $6 + 4\sqrt{2} - \sqrt{2} + 7$ **b)** $2\sqrt[3]{x} + 8x + 4\sqrt[3]{x} - 3$

Solución

a) $6 + 4\sqrt{2} - \sqrt{2} + 7 = 6 + 7 + 4\sqrt{2} - \sqrt{2}$ *Coloque juntos los términos semejantes.*
$= 13 + (4 - 1)\sqrt{2}$
$= 13 + 3\sqrt{2}$ (o $3\sqrt{2} + 13$)

b) $2\sqrt[3]{x} + 8x + 4\sqrt[3]{x} - 3 = 6\sqrt[3]{x} + 8x - 3$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 15

Como se mencionó en la sección 7.3, a veces es posible convertir radicales no semejantes en radicales semejantes simplificando uno o más de ellos.

EJEMPLO 2 ▸ Simplifique. $\sqrt{3} + \sqrt{27}$.

Solución Como $\sqrt{3}$ y $\sqrt{27}$ son radicales no semejantes, no se pueden sumar como están ahora. Sin embargo, podemos simplificar $\sqrt{27}$ para obtener radicales semejantes.

$$\sqrt{3} + \sqrt{27} = \sqrt{3} + \sqrt{9}\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 19

Para sumar o restar radicales

1. Simplifique cada expresión radical.
2. Combine (sume o reste) los radicales semejantes (si existen).

EJEMPLO 3 ▸ Simplifique.

a) $5\sqrt{24} + \sqrt{54}$ **b)** $2\sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{20}$ **c)** $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{81} - 7\sqrt[3]{3}$

Solución

a) $5\sqrt{24} + \sqrt{54} = 5 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{6}$
$= 5 \cdot 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$
$= 10\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 13\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{5}$
$= 2 \cdot 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$
$= 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{81} - 7\sqrt[3]{3} = 3 + \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{3}$
$= 3 + 3\sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{3} = 3 - 4\sqrt[3]{3}$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 23

EJEMPLO 4 Simplifique. **a)** $\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2y} + x\sqrt{y}$ **b)** $\sqrt[3]{x^{13}y^2} - \sqrt[3]{x^4y^8}$

Solución

a) $\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2y} + x\sqrt{y} = x - \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{y} + x\sqrt{y}$

$= x - x\sqrt{y} + x\sqrt{y}$

$= x$

b) $\sqrt[3]{x^{13}y^2} - \sqrt[3]{x^4y^8} = \sqrt[3]{x^{12}}\cdot\sqrt[3]{xy^2} - \sqrt[3]{x^3y^6}\cdot\sqrt[3]{xy^2}$

$= x^4\sqrt[3]{xy^2} - xy^2\sqrt[3]{xy^2}$

Ahora factorice el factor común, $\sqrt[3]{xy^2}$.

$= (x^4 - xy^2)\sqrt[3]{xy^2}$

Ahora resuelva el ejercicio 35

Sugerencia útil

La regla del producto y la regla del cociente para radicales que se presentaron en la sección 7.3 son

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Con frecuencia los estudiantes suponen, erróneamente, que existen propiedades semejantes para la suma y la resta, pero esto no es así. Para comprobarlo, sea n una raíz cuadrada (índice 2), $a = 9$ y $b = 16$.

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$$
$$\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9+16}$$
$$3 + 4 \neq \sqrt{25}$$
$$7 \neq 5$$

A continuación se analiza la multiplicación de radicales.

2 Multiplicar radicales

Para multiplicar radicales se utiliza la regla del producto que se indicó anteriormente. Después de la multiplicación, con frecuencia se simplifica el nuevo radical (vea los ejemplos 5 y 6).

EJEMPLO 5 Multiplique y simplifique.

a) $\sqrt{6x^3}\sqrt{8x^6}$ **b)** $\sqrt[3]{2x}\sqrt[3]{4x^2}$ **c)** $\sqrt[4]{4x^{11}y}\sqrt[4]{16x^6y^{22}}$

Solución

a) $\sqrt{6x^3}\sqrt{8x^6} = \sqrt{6x^3\cdot 8x^6}$ *Regla del producto para radicales.*

$= \sqrt{48x^9}$

$= \sqrt{16x^8}\sqrt{3x}$ *$16x^8$ es un cuadrado perfecto.*

$= 4x^4\sqrt{3x}$

b) $\sqrt[3]{2x}\sqrt[3]{4x^2} = \sqrt[3]{2x\cdot 4x^2}$ *Regla del producto para radicales.*

$= \sqrt[3]{8x^3}$ *$8x^3$ es un cubo perfecto.*

$= 2x$

c) $\sqrt[4]{4x^{11}y}\sqrt[4]{16x^6y^{22}} = \sqrt[4]{4x^{11}y\cdot 16x^6y^{22}}$ *Regla del producto para radicales.*

$= \sqrt[4]{64x^{17}y^{23}}$

$= \sqrt[4]{16x^{16}y^{20}}\sqrt[4]{4xy^3}$ *Las raíces cuartas perfectas más grandes que son factores, son 16, x^{16} y y^{20}.*

$= 2x^4y^5\sqrt[4]{4xy^3}$

Ahora resuelva el ejercicio 47

Recuerde que, como se indicó antes, cuando un radical está simplificado, el radicando no tiene ninguna variable con un exponente mayor o igual al índice.

EJEMPLO 6 Multiplique y simplifique. $\sqrt{2x}(\sqrt{8x}-\sqrt{50})$.

Solución Empiece por utilizar la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned}\sqrt{2x}(\sqrt{8x}-\sqrt{50}) &= (\sqrt{2x})(\sqrt{8x})+(\sqrt{2x})(-\sqrt{50})\\ &= \sqrt{16x^2}-\sqrt{100x}\\ &= 4x-\sqrt{100}\sqrt{x}\\ &= 4x-10\sqrt{x}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 53

En el ejemplo 6, observe que podría haberse obtenido el mismo resultado simplificando primero $\sqrt{8x}$ y $\sqrt{50}$ y después multiplicando. Intente resolver dicho ejemplo de esta manera.

A continuación multiplicaremos dos factores que son binomios. Para multiplicar factores que son binomios, cada término de un factor debe multiplicarse por cada término del otro. Esto puede lograrse mediante el método PIES que analizamos con anterioridad.

EJEMPLO 7 Multiplique $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-y)$.

Solución Multiplicaremos utilizando el método PIES.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{P} & & \text{I} & & \text{E} & & \text{S}\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ (\sqrt{x})(\sqrt{x}) & + & (-\sqrt{y})(\sqrt{x}) & + & (\sqrt{x})(-y) & + & (-\sqrt{y})(-y)\\ =\ \sqrt{x^2} & - & \sqrt{xy} & - & y\sqrt{x} & + & y\sqrt{y}\end{array}$$

$$= x - y\sqrt{x} - \sqrt{xy} + y\sqrt{y}$$

Ahora resuelva el ejercicio 63

EJEMPLO 8 Simplifique. **a)** $(2\sqrt{6}-\sqrt{3})^2$ **b)** $(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2y^2})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{8y})$

Solución

a) $(2\sqrt{6}-\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{6}-\sqrt{3})(2\sqrt{6}-\sqrt{3})$

Ahora multiplique los factores usando el método PIES.

$$\begin{aligned} &\quad\ \ \text{P}\qquad\qquad\ \text{I}\qquad\qquad\quad \text{E}\qquad\qquad\quad \text{S}\\ &(2\sqrt{6})(2\sqrt{6})+(-\sqrt{3})(2\sqrt{6})+(2\sqrt{6})(-\sqrt{3})+(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})\\ &= 4(6)-2\sqrt{18}-2\sqrt{18}+3\\ &= 24-2\sqrt{18}-2\sqrt{18}+3\\ &= 27-4\sqrt{18}\\ &= 27-4\sqrt{9}\sqrt{2}\\ &= 27-12\sqrt{2}\end{aligned}$$

b) Multiplique los factores mediante el método PIES.

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2y^2})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{8y}) &\ \ \text{P}\qquad\qquad\ \text{I}\qquad\qquad\qquad \text{E}\qquad\qquad\quad \text{S}\\ &= (\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x^2})+(-\sqrt[3]{2y^2})(\sqrt[3]{x^2})+(\sqrt[3]{x})(-\sqrt[3]{8y})+(-\sqrt[3]{2y^2})(-\sqrt[3]{8y})\\ &= \sqrt[3]{x^3}-\sqrt[3]{2x^2y^2}-\sqrt[3]{8xy}+\sqrt[3]{16y^3}\\ &= \sqrt[3]{x^3}-\sqrt[3]{2x^2y^2}-\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{8y^3}\sqrt[3]{2}\\ &= x-\sqrt[3]{2x^2y^2}-2\sqrt[3]{xy}+2y\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 99

EJEMPLO 9 ▸ Multiplique $(3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6})$.

Solución Podemos multiplicar mediante el método PIES.

$$\begin{aligned}
& \qquad\qquad\quad \text{P} \qquad\quad \text{I} \qquad\quad\ \text{E} \qquad\quad \text{S} \\
(3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6}) &= 3(3) + (\sqrt{6})(3) + 3(-\sqrt{6}) + (\sqrt{6})(-\sqrt{6}) \\
&= 9 + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{6} - \sqrt{36} \\
&= 9 - \sqrt{36} \\
&= 9 - 6 = 3
\end{aligned}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 59

En el ejemplo 9, observe que multiplicamos *la suma y la diferencia de los mismos dos términos*. Recuerde que en la sección 5.6 se dijo que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Si hacemos $a = 3$ y $b = \sqrt{6}$, podemos multiplicar como sigue.

$$\begin{aligned}
(a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \\
(3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6}) &= 3^2 - (\sqrt{6})^2 \\
&= 9 - 6 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Cuando multiplicamos la suma y la diferencia de los mismos dos términos, podemos obtener la respuesta mediante la diferencia de los cuadrados de los dos términos. Veremos multiplicaciones de este tipo en la sección 7.5.

EJEMPLO 10 ▸ Si $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ y $g(x) = \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}$, determine **a)** $(f \cdot g)(x)$ y **b)** $(f \cdot g)(6)$.

Solución

a) A partir de lo que se analizó en la sección 3.6, sabemos que $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\
&= \sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}\right) && \text{Sustituir los valores dados.} \\
&= \sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x^2} && \text{Propiedad distributiva.} \\
&= \sqrt[3]{x^6} + \sqrt[3]{x^4} && \text{Regla del producto para radicales.} \\
&= x^2 + x\sqrt[3]{x} && \text{Simplificar radicales.}
\end{aligned}$$

b) Para calcular $(f \cdot g)(6)$, sustituya x por 6 en la respuesta que obtuvo en la parte **a)**.

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)(x) &= x^2 + x\sqrt[3]{x} \\
(f \cdot g)(6) &= 6^2 + 6\sqrt[3]{6} && \text{Sustituir } x \text{ por 6.} \\
&= 36 + 6\sqrt[3]{6}
\end{aligned}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 77

EJEMPLO 11 ▸ Simplifique $f(x)$ si **a)** $f(x) = \sqrt{x + 3}\,\sqrt{x + 3}$, $x \geq -3$ y **b)** $f(x) = \sqrt{3x^2 - 30x + 75}$; suponga que las variables pueden ser cualesquiera números reales.

Solución

a)
$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x + 3}\,\sqrt{x + 3} \\
&= \sqrt{(x + 3)(x + 3)} && \text{Regla del producto para radicales.} \\
&= \sqrt{(x + 3)^2} \\
&= x + 3
\end{aligned}$$

Como se nos dijo que $x \geq -3$, podemos utilizar la regla del producto. Observe que el radicando será un número no negativo para cualquier $x \geq -3$, y podemos escribir la respuesta como $x + 3$ en lugar de $|x + 3|$.

b) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 30x + 75}$

$= \sqrt{3(x^2 - 10x + 25)}$ *Factorizar 3.*

$= \sqrt{3(x - 5)^2}$ *Escribir como el cuadrado de un binomio.*

$= \sqrt{3}\sqrt{(x - 5)^2}$ *Regla del producto para radicales.*

$= \sqrt{3}|x - 5|$

Como las variables podrían ser cualquier número real, escribimos nuestra respuesta con signos de valor absoluto. Si nos hubieran dicho que $x - 5$ era no negativo, entonces podríamos haber escrito nuestra respuesta como $\sqrt{3}(x - 5)$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 105

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.4

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué son los radicales semejantes?
2. **a)** Explique cómo sumar radicales semejantes.
   b) Mediante el procedimiento indicado en la parte **a)**, sume $\frac{3}{5}\sqrt{5} + \frac{5}{4}\sqrt{5}$.
3. Utilice una calculadora para determinar $\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$.
4. Utilice una calculadora para determinar $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$.
5. ¿Puede ser $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$? Explique su respuesta y proporcione un ejemplo que la apoye.
6. Como $64 + 36 = 100$, ¿puede ser $\sqrt{64} + \sqrt{36} = \sqrt{100}$? Explique su respuesta.

Práctica de habilidades

En este conjunto de ejercicios, suponga que todas las variables representan números reales positivos.

Simplifique.

7. $\sqrt{3} - \sqrt{3}$
8. $2\sqrt{6} - \sqrt{6}$
9. $6\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$
10. $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 11$
11. $2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 5$
12. $6\sqrt[3]{7} - 8\sqrt[3]{7}$
13. $2\sqrt[4]{y} - 9\sqrt[4]{y}$
14. $3\sqrt[5]{a} + 7 + 5\sqrt[5]{a} - 2$
15. $3\sqrt{5} - \sqrt[3]{x} + 6\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{x}$
16. $9 + 4\sqrt[4]{a} - 7\sqrt[4]{a} + 5$
17. $5\sqrt{x} - 8\sqrt{y} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - \sqrt{x}$
18. $8\sqrt{a} + 4\sqrt[3]{b} + 7\sqrt{a} - 12\sqrt[3]{b}$

Simplifique.

19. $\sqrt{5} + \sqrt{20}$
20. $\sqrt{75} + \sqrt{108}$
21. $-6\sqrt{75} + 5\sqrt{125}$
22. $3\sqrt{250} + 4\sqrt{160}$
23. $-4\sqrt{90} + 3\sqrt{40} + 2\sqrt{10}$
24. $3\sqrt{40x^2y} + 2x\sqrt{490y}$
25. $\sqrt{500xy^2} + y\sqrt{320x}$
26. $5\sqrt{8} + 2\sqrt{50} - 3\sqrt{72}$
27. $2\sqrt{5x} - 3\sqrt{20x} - 4\sqrt{45x}$
28. $3\sqrt{27c^2} - 2\sqrt{108c^2} - \sqrt{48c^2}$
29. $3\sqrt{50a^2} - 3\sqrt{72a^2} - 8a\sqrt{18}$
30. $4\sqrt[3]{5} - 5\sqrt[3]{40}$
31. $\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{32}$
32. $3\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$
33. $\sqrt[3]{27} - 5\sqrt[3]{8}$
34. $3\sqrt{45x^3} + \sqrt{5x}$
35. $2\sqrt[3]{a^4b^2} + 4a\sqrt[3]{ab^2}$
36. $5y\sqrt[4]{48x^5} - x\sqrt[4]{3x^5y^4}$
37. $\sqrt{4r^7s^5} + 3r^2\sqrt{r^3s^5} - 2rs\sqrt{r^5s^3}$
38. $x\sqrt[3]{27x^5y^2} - x^2\sqrt[3]{x^2y^2} + 4\sqrt[3]{x^8y^2}$
39. $\sqrt[3]{128x^8y^{10}} - 2x^2y\sqrt[3]{16x^2y^7}$
40. $5\sqrt[3]{320x^5y^8} + 3x\sqrt[3]{135x^2y^8}$

Simplifique.

41. $\sqrt{3}\sqrt{27}$
42. $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}$
43. $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{14}$
44. $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{54}$
45. $\sqrt{9m^3n^7}\sqrt{3mn^4}$
46. $\sqrt[3]{5ab^2}\sqrt[3]{25a^4b^{12}}$
47. $\sqrt[3]{9x^7y^{10}}\sqrt[3]{6x^4y^3}$
48. $\sqrt[4]{3x^9y^{12}}\sqrt[4]{54x^4y^7}$
49. $\sqrt[5]{x^{24}y^{30}z^9}\sqrt[5]{x^{13}y^8z^7}$
50. $\sqrt[4]{8x^4yz^3}\sqrt[4]{2x^2y^3z^7}$
51. $(\sqrt[3]{2x^3y^4})^2$
52. $\sqrt{2}(\sqrt{6} + \sqrt{18})$
53. $\sqrt{5}(\sqrt{5} - \sqrt{3})$
54. $\sqrt{3}(\sqrt{12} + \sqrt{8})$
55. $\sqrt[3]{y}(2\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y^8})$
56. $\sqrt{3y}(\sqrt{27y^2} - \sqrt{y})$
57. $2\sqrt[3]{x^4y^5}(\sqrt[3]{8x^{12}y^4} + \sqrt[3]{16xy^9})$
58. $\sqrt[5]{16x^7y^6}(\sqrt[5]{2x^6y^9} - \sqrt[5]{10x^3y^7})$
59. $(8 + \sqrt{5})(8 - \sqrt{5})$
60. $(9 - \sqrt{5})(9 + \sqrt{5})$
61. $(\sqrt{6} + x)(\sqrt{6} - x)$
62. $(\sqrt{x} + y)(\sqrt{x} - y)$
63. $(\sqrt{7} - \sqrt{z})(\sqrt{7} + \sqrt{z})$
64. $(3\sqrt{a} - 5\sqrt{b})(3\sqrt{a} + 5\sqrt{b})$

65. $(\sqrt{3}+4)(\sqrt{3}+5)$
66. $(1+\sqrt{5})(8+\sqrt{5})$
67. $(3-\sqrt{2})(4-\sqrt{8})$
68. $(5\sqrt{6}+3)(4\sqrt{6}-1)$
69. $(4\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
70. $(\sqrt{3}+7)^2$
71. $(2\sqrt{5}-3)^2$
72. $(\sqrt{y}+\sqrt{6z})(\sqrt{2z}-\sqrt{8y})$
73. $(2\sqrt{3x}-\sqrt{y})(3\sqrt{3x}+\sqrt{y})$
74. $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4})$
75. $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6})(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{36})$
76. $(\sqrt[3]{4x}-\sqrt[3]{2y})(\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{10})$

En los ejercicios 77 a 82, están dadas $f(x)$ y $g(x)$. Determine $(f\cdot g)(x)$.

77. $f(x)=\sqrt{2x},\ g(x)=\sqrt{8x}-\sqrt{32}$
78. $f(x)=\sqrt{6x},\ g(x)=\sqrt{6x}-\sqrt{10x}$
79. $f(x)=\sqrt[3]{x},\ g(x)=\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^4}$
80. $f(x)=\sqrt[3]{2x^2},\ g(x)=\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{32x^2}$
81. $f(x)=\sqrt[4]{3x^2},\ g(x)=\sqrt[4]{9x^4}-\sqrt[4]{x^7}$
82. $f(x)=\sqrt[4]{2x^3},\ g(x)=\sqrt[4]{8x^5}-\sqrt[4]{5x^6}$

Simplifique. Estos ejercicios son una combinación de los que se presentaron antes en esta sección.

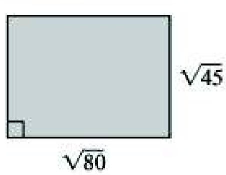
83. $\sqrt{24}$
84. $\sqrt{300}$
85. $\sqrt{125}-\sqrt{20}$
86. $4\sqrt{7}+2\sqrt{63}-2\sqrt{28}$
87. $(3\sqrt{2}-4)(\sqrt{2}+5)$
88. $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{20})$
89. $\sqrt{6}(5-\sqrt{2})$
90. $3\sqrt[3]{81}+4\sqrt[3]{24}$
91. $\sqrt{150}\,\sqrt{3}$
92. $\sqrt[4]{2}\,\sqrt[4]{40}$
93. $\sqrt[3]{80x^{11}}$
94. $\sqrt[3]{x^9y^{11}z}$
95. $\sqrt[6]{128ab^{17}c^9}$
96. $\sqrt[5]{14x^4y^2}\,\sqrt[5]{3x^4y^3}$
97. $2b\sqrt[4]{a^4b}+ab\sqrt[4]{16b}$
98. $2\sqrt[3]{24a^3y^4}+4a\sqrt[3]{81y^4}$
99. $\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y^2}\right)$
100. $(\sqrt[3]{a}+5)\left(\sqrt[3]{a^2}-6\right)$
101. $\sqrt[3]{3ab^2}\left(\sqrt[3]{4a^4b^3}-\sqrt[3]{8a^5b^4}\right)$
102. $\sqrt[4]{4st^2}\left(\sqrt[4]{2s^5t^6}+\sqrt[4]{5s^9t^2}\right)$

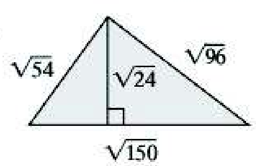
Simplifique las expresiones siguientes. En los ejercicios 105 y 106, suponga que las variables pueden ser cualesquiera números reales. Vea el ejemplo 11.

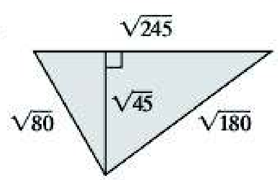
103. $f(x)=\sqrt{2x-5}\,\sqrt{2x-5},\ x\geq-\dfrac{5}{2}$
104. $g(a)=\sqrt{3a+7}\,\sqrt{3a+7},\ a\geq-\dfrac{7}{3}$
105. $h(r)=\sqrt{4r^2-32r+64}$
106. $f(b)=\sqrt{20b^2+60b+45}$

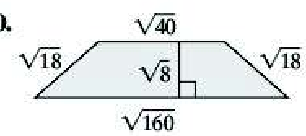
Resolución de problemas

Determine el perímetro y el área de las figuras siguientes. Dé su respuesta en forma radical con los radicales simplificados.

107.


108.


109.


110.


111. ¿La suma de dos radicales siempre dará por resultado un radical? Proporcione un ejemplo para apoyar su respuesta.

112. ¿La resta de dos radicales siempre dará por resultado un radical? Proporcione un ejemplo para apoyar su respuesta.

113. Marca de derrape A veces los agentes de tránsito utilizan la fórmula $s=\sqrt{30FB}$ para determinar la velocidad a que circulaba un automóvil, s, en millas por hora, con base en las marcas de derrape que dejó sobre el camino. En la fórmula, la letra F representa "el factor del camino", que se determina según el material y las condiciones de la superficie del camino, y la letra B representa la distancia de frenado, en pies. El oficial Jenkins investiga un accidente. Determine la velocidad del automóvil si las marcas de derrape son de 80 pies de longitud, y **a)** el camino era asfalto seco, cuyo factor de camino es 0.85, y **b)** el camino era grava mojada, cuyo factor de camino es 0.52.



114. Manguera contra incendios La velocidad a que fluye el agua a través de una manguera contra incendios, R, en galones por minuto, puede calcularse mediante la fórmula $R=28d^2\sqrt{P}$, donde d es el diámetro de la boquilla de la manguera, en pulgadas, y P es la presión de salida, en libras por pulgada cuadrada. Si la boquilla de una manguera tiene un diámetro de 2.5 pulgadas y la presión de salida es de 80 libras por pulgada, determine la velocidad del flujo de agua.

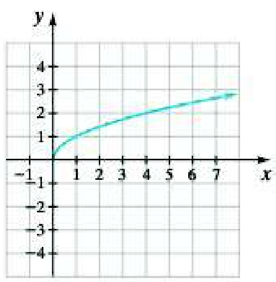


115. Altura de niñas La función $f(t) = 3\sqrt{t} + 19$ puede usarse para calcular la altura media, $f(t)$, en pulgadas, de niñas de edad t, en meses, donde $1 \le t \le 60$. Calcule la altura promedio de niñas de **a)** 36 meses, **b)** 40 meses.

116. Desviación estándar En estadística, la desviación estándar de la población, σ, se lee "sigma", es una medida de la dispersión de un conjunto de datos respecto de su valor medio. Cuanto mayor sea la dispersión, mayor será la desviación estándar. Una fórmula que se utiliza para determinar sigma es $\sigma = \sqrt{npq}$, donde n representa el tamaño de la muestra, p representa el porcentaje (o probabilidad) de que algo específico ocurra, y q el porcentaje (o probabilidad) de que no ocurra. En una muestra de 600 personas que compraron boletos para viajar en avión, el porcentaje que se presentó a su vuelo, p, fue 0.93, y el porcentaje que no lo hizo, q, fue 0.07. Utilice esta información para determinar σ.



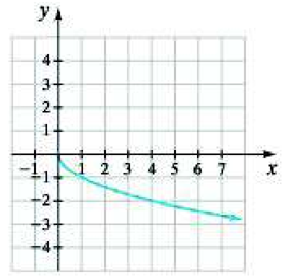
117. A continuación se muestra la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.



a) Si $g(x) = 2$, trace la gráfica de $(f + g)(x)$.

b) ¿Qué sucede si se suma 2 a la gráfica de $f(x)$?

118. La gráfica de $f(x) = -\sqrt{x}$ es la siguiente.



a) Si $g(x) = 3$, trace la gráfica de $(f + g)(x)$.

b) ¿Qué sucede si se suma 3 a la gráfica de $f(x)$?

119. Si le indican que $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{x} - 2$.

a) Trace la gráfica de $(f - g)(x)$. Explique cómo determinó su respuesta.

b) ¿Cuál es el dominio de $(f - g)(x)$?

120. Si le dicen que $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = -\sqrt{x} - 3$.

a) Trace la gráfica de $(f + g)(x)$. Explique cómo determinó su respuesta.

b) ¿Cuál es el dominio de $(f + g)(x)$?

121. Grafique la función $f(x) = \sqrt{x^2}$.

122. Grafique la función $f(x) = \sqrt{x^2} - 4$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.2] **123.** ¿Qué es un número racional?

[1.3] **124.** ¿Qué es un número real?

125. ¿Qué es un número irracional?

126. ¿Cuál es la definición de $|a|$?

[2.2] **127.** Despeje m de la fórmula $E = \frac{1}{2}mv^2$.

[2.5] **128.** Resuelva la desigualdad $-4 < 2x - 3 \le 7$ e indique la solución **a)** en la recta numérica; **b)** en notación de intervalos; **c)** en notación constructiva de conjuntos.

Examen de mitad de capítulo: 7.1-7.4

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas, y la sección en que se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repase el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.

Determine la raíz que se indica.

1. $\sqrt{121}$

2. $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$

Utilice valor absoluto para evaluar.

3. $\sqrt{(-16.3)^2}$

4. $\sqrt{(3a^2 - 4b^3)^2}$

5. Determine $g(16)$, si $g(x) = \frac{x}{8} + \sqrt{4x} - 7$.

6. Escriba $\sqrt[5]{7a^4b^3}$ en forma exponencial.

7. Evalúe $-49^{1/2} + 81^{3/4}$.

Simplifique cada expresión.

8. $(\sqrt[4]{a^2b^3c})^{20}$

9. $7x^{-5/2} \cdot 2x^{3/2}$

10. Multiplique $8x^{-2}(x^3 + 2x^{-1/2})$.

Simplifique cada radical.

11. $\sqrt{32x^4y^9}$

12. $\sqrt[6]{64a^{13}b^{23}c^{15}}$

13. $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$

14. $\frac{\sqrt{20x^5y^{12}}}{\sqrt{180x^{15}y^7}}$

Simplifique

15. $2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} + 9\sqrt{x} + 15\sqrt{y}$

16. $2\sqrt{90x^2y} + 3x\sqrt{490y}$

17. $(x + \sqrt{5})(2x - 3\sqrt{5})$

18. $2\sqrt{3a}(\sqrt{27a^2} - 5\sqrt{4a})$

19. $3b\sqrt[4]{a^5b} + 2ab\sqrt[4]{16ab}$

20. Al simplificar las raíces cuadradas siguientes, ¿en qué partes la respuesta tiene un valor absoluto? Explique su respuesta y simplifique las partes **a)** y **b)**.

a) $\sqrt{(x-3)^2}$

b) $\sqrt{64x^2}, x \geq 0$

7.5 División de radicales

1. Racionalizar denominadores.
2. Racionalizar un denominador mediante el conjugado.
3. Entender cuando un radical está simplificado.
4. Utilizar la racionalización del denominador en un problema de adición.
5. Dividir expresiones radicales con índices diferentes.

1 Racionalizar denominadores

En la sección 7.3 se presentó la regla del cociente para radicales; ahora la usaremos para resolver otros problemas de división y para racionalizar denominadores.

Cuando el denominador de una fracción contiene un radical, por lo común simplificamos la expresión **racionalizando el denominador**. Racionalizar un denominador es eliminar todos los radicales del denominador. Cuando se suman radicales, podría ser necesario racionalizar los denominadores, como se ilustra en el ejemplo 6.

Para racionalizar un denominador

Multiplique el numerador y el denominador de la fracción por un radical, de tal manera que el radicando del denominador se convierta en una potencia perfecta.

Cuando el numerador y el denominador se multiplican por la misma expresión radical, en realidad se está multiplicando la fracción por 1, con lo cual no se modifica su valor.

EJEMPLO 1 Simplifique. **a)** $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **b)** $\frac{x}{4\sqrt{3}}$ **c)** $\frac{11}{\sqrt{2x}}$ **d)** $\frac{\sqrt[3]{16a^4}}{\sqrt[3]{b}}$

Solución Para simplificar cada expresión debemos racionalizar los denominadores. Para ello, multiplicamos el numerador y el denominador por un radical que haga que el denominador se convierta en una potencia perfecta para el índice dado.

a) $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{x}{4\sqrt{3}} = \frac{x}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{4 \cdot 3} = \frac{x\sqrt{3}}{12}$

c) Hay dos factores en el radicando, 2 y x. Debemos hacer que cada factor sea un cuadrado perfecto. Como 2^2 o 4 es un cuadrado perfecto, y x^2 también, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{2x}$.

$$\frac{11}{\sqrt{2x}} = \frac{11}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$$
$$= \frac{11\sqrt{2x}}{\sqrt{4x^2}}$$
$$= \frac{11\sqrt{2x}}{2x}$$

d) El numerador y el denominador carecen de factores comunes. Antes de racionalizar el denominador, simplifiquemos el numerador.

$$\frac{\sqrt[3]{16a^4}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{8a^3}\,\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{b}}$$ Regla del producto para radicales.

$$= \frac{2a\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{b}}$$ Simplificar el numerador.

Ahora racionalicemos el denominador. Como el denominador es una raíz cúbica, necesitamos convertir el radicando en un cubo perfecto. En vista de que el denominador contiene b y necesitamos b^3, necesitamos dos factores de b. Por lo tanto, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{b^2}$.

$$= \frac{2a\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^2}}$$

$$= \frac{2a\sqrt[3]{2ab^2}}{\sqrt[3]{b^3}}$$

$$= \frac{2a\sqrt[3]{2ab^2}}{b}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 15

EJEMPLO 2 ▸ Simplifique. **a)** $\sqrt{\frac{5}{7}}$ **b)** $\sqrt[3]{\frac{x}{2y^2}}$ **c)** $\sqrt[4]{\frac{32x^9y^6}{3z^2}}$

Solución En cada parte, utilizaremos la regla del cociente para escribir el radical como un cociente de dos radicales.

a) $\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$

b) $\sqrt[3]{\frac{x}{2y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2y^2}}$

El denominador es $\sqrt[3]{2y^2}$ y queremos cambiarlo a $\sqrt[3]{2^3y^3}$. Ahora multiplicamos el numerador y el denominador por la raíz cúbica de una expresión que haga que el radicando del denominador sea $\sqrt[3]{2^3y^3}$. Como $2 \cdot 2^2 = 2^3$ y $y^2 \cdot y = y^3$, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{2^2y}$.

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2y^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2y}}{\sqrt[3]{2^2y}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{4y}}{\sqrt[3]{2^3y^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4xy}}{2y}$$

c) Después de usar la regla del cociente, simplificamos el numerador.

$$\sqrt[4]{\frac{32x^9y^6}{3z^2}} = \frac{\sqrt[4]{32x^9y^6}}{\sqrt[4]{3z^2}}$$ Regla del cociente para radicales.

$$= \frac{\sqrt[4]{16x^8y^4}\,\sqrt[4]{2xy^2}}{\sqrt[4]{3z^2}}$$ Regla del producto para radicales.

$$= \frac{2x^2y\sqrt[4]{2xy^2}}{\sqrt[4]{3z^2}}$$ Simplificar el numerador.

Ahora racionalizaremos el denominador. Para que el radicando del denominador sea una cuarta potencia perfecta, necesitamos convertir cada factor en una potencia de 4. Como el denominador contiene un factor de 3, necesitamos tres factores de 3, o 3^3. Ya que hay dos factores de z, necesitamos dos factores más de z, o z^2. Por lo tanto, multiplicaremos el numerador y el denominador por $\sqrt[4]{3^3z^2}$.

$$= \frac{2x^2y\sqrt[4]{2xy^2}}{\sqrt[4]{3z^2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^3z^2}}{\sqrt[4]{3^3z^2}}$$

$$= \frac{2x^2y\sqrt[4]{2xy^2}\sqrt[4]{27z^2}}{\sqrt[4]{3z^2}\sqrt[4]{3^3z^2}}$$

$$= \frac{2x^2y\sqrt[4]{54xy^2z^2}}{\sqrt[4]{3^4z^4}}$$ Regla del producto para radicales.

$$= \frac{2x^2y\sqrt[4]{54xy^2z^2}}{3z}$$

Nota: No hay factores de 54 que sean cuartas potencias perfectas, y cada exponente del radicando es menor que el índice.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 53

2 Racionalizar un denominador mediante el conjugado

Cuando el denominador de una expresión racional es un binomio que contiene un radical, racionalizamos el denominador. Para hacerlo, multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción por el **conjugado** del denominador. El conjugado de un binomio es un binomio que tiene los mismos dos términos, pero con el signo del segundo término cambiado.

Expresión	Conjugado
$9 + \sqrt{2}$	$9 - \sqrt{2}$
$8\sqrt{3} - \sqrt{5}$	$8\sqrt{3} + \sqrt{5}$
$\sqrt{x} + \sqrt{y}$	$\sqrt{x} - \sqrt{y}$
$6a - \sqrt{b}$	$6a + \sqrt{b}$

Cuando un binomio se multiplica por su conjugado, los productos externo e interno sumarán 0. En la sección 7.4 se multiplicaron radicales con factores binomiales. Resolveremos un ejemplo más de multiplicación de expresiones radicales en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 ▸ Multiplique $(6 + \sqrt{3})(6 - \sqrt{3})$.

Solución Multiplique utilizando el método PIES.

$$\begin{aligned}
& \qquad\qquad\qquad\quad \text{P} \qquad\quad \text{I} \qquad\qquad \text{E} \qquad\qquad \text{S} \\
(6 + \sqrt{3})(6 - \sqrt{3}) &= 6(6) + 6(\sqrt{3}) + 6(-\sqrt{3}) + \sqrt{3}(-\sqrt{3}) \\
&= 36 + 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - \sqrt{9} \\
&= 36 - \sqrt{9} \\
&= 36 - 3 \\
&= 33
\end{aligned}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 57

En el ejemplo 3 se obtendría el mismo resultado utilizando la fórmula para el producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos. El producto resulta en la

diferencia de dos cuadrados, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Si hacemos $a = 6$ y $b = \sqrt{3}$, usando la fórmula obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \\ (6 + \sqrt{3})(6 - \sqrt{3}) &= 6^2 - (\sqrt{3})^2 \\ &= 36 - 3 \\ &= 33\end{aligned}$$

Ahora resolvamos un ejemplo en el que racionalizaremos un denominador con dos términos.

EJEMPLO 4 Simplifique. **a)** $\dfrac{13}{4 + \sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ **c)** $\dfrac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}}$

Solución Racionalizamos el denominador de cada expresión multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

a)
$$\begin{aligned}\frac{13}{4 + \sqrt{3}} &= \frac{13}{4 + \sqrt{3}} \cdot \frac{4 - \sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{13(4 - \sqrt{3})}{(4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})} \\ &= \frac{13(4 - \sqrt{3})}{16 - 3} \\ &= \frac{\overset{1}{\cancel{13}}(4 - \sqrt{3})}{\underset{1}{\cancel{13}}} \text{ o } 4 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} &= \frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{6(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} \\ &= \frac{\overset{2}{\cancel{6}}(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{\underset{1}{\cancel{3}}} \\ &= 2(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \quad \text{o} \quad 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} &= \frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \cdot \frac{a - \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} \\ &= \frac{a^2 - a\sqrt{b} - a\sqrt{b} + \sqrt{b^2}}{a^2 - b} \\ &= \frac{a^2 - 2a\sqrt{b} + b}{a^2 - b}\end{aligned}$$

Recuerde que no se puede dividir a^2 o b, ya que se trata de términos, no de factores.

Ahora resuelva el ejercicio 75

Ahora que se ha mostrado cómo racionalizar denominadores, analicemos los criterios que debe cumplir un radical para considerar que está simplificado.

3 Entender cuando un radical está simplificado

Después de simplificar una expresión radical, usted deberá comprobar que la ha simplificado tanto como haya sido posible.

Una expresión radical está simplificada cuando se cumplen por completo estas tres condiciones

1. No hay potencias perfectas que sean factores del radicando, y todos los exponentes del radicando son menores que el índice.
2. Ningún radicando tiene una fracción.
3. Ningún denominador tiene radicales.

EJEMPLO 5 Determine si las siguientes expresiones están simplificadas. Si es así, explique por qué; de lo contrario, simplifíquelas.

a) $\sqrt{48x^5}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

Solución

a) Esta expresión no está simplificada, ya que 16 es un cuadrado perfecto que es factor de 48, y x^4 es un cuadrado perfecto que es factor de x^5. Observe que el exponente de la variable del radicando, 5, es mayor que el índice, 2. Siempre que el exponente de la variable del radicando es mayor o igual que el índice, el radicando tiene una potencia perfecta que es factor de la variable y, por lo tanto, es necesario simplificar más el radical. Hagámoslo ahora.

$$\sqrt{48x^5} = \sqrt{16x^4 \cdot 3x} = \sqrt{16x^4} \cdot \sqrt{3x} = 4x^2\sqrt{3x}$$

b) Esta expresión no está simplificada, ya que el radicando contiene la fracción $\frac{1}{2}$. Esto viola la condición 2. Para simplificarla, utilizaremos primero la regla del cociente y luego racionalizamos el denominador.

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Esta expresión no está simplificada, ya que el denominador, $\sqrt{6}$, contiene un radical. Esto viola la condición 3. Para simplificarla racionalizaremos el denominador.

$$\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Ahora resuelva el ejercicio 7

4 Utilizar la racionalización del denominador en un problema de adición

Resolvamos ahora un problema de adición que requiere racionalizar el denominador. En este ejemplo se utilizan los métodos para sumar y restar radicales que analizamos en las secciones 7.3 y 7.4.

EJEMPLO 6 Simplifique $4\sqrt{2} - \dfrac{3}{\sqrt{8}} + \sqrt{32}$.

Solución Empecemos por racionalizar el denominador y simplificar $\sqrt{32}$.

$$4\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{8}} + \sqrt{32} = 4\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{16}\sqrt{2} \quad \text{Racionalizar el denominador.}$$

$$= 4\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{16}} + 4\sqrt{2} \quad \text{Regla del producto.}$$

$$= 4\sqrt{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \quad \text{Escribir } \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{16}} \text{ como } \frac{3}{4}\sqrt{2}.$$

$$= \left(4 - \frac{3}{4} + 4\right)\sqrt{2} \quad \text{Simplificar.}$$

$$= \frac{29\sqrt{2}}{4}$$

Ahora resuelva el ejercicio 115

5 Dividir expresiones radicales con índices diferentes

Ahora dividiremos expresiones radicales donde los radicales tienen índices diferentes. Para resolver este tipo de problemas, escriba cada radical en forma exponencial; luego, para simplificar la expresión, utilice las reglas de los exponentes como se explicó en la sección 7.2. El ejemplo 7 ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 7 Simplifique. **a)** $\dfrac{\sqrt[5]{(m+n)^7}}{\sqrt[3]{(m+n)^4}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{a^5b^4}}{\sqrt{a^2b}}$

Solución Empiece escribiendo el numerador y el denominador con exponentes racionales.

a)
$$\frac{\sqrt[5]{(m+n)^7}}{\sqrt[3]{(m+n)^4}} = \frac{(m+n)^{7/5}}{(m+n)^{4/3}} \quad \text{Escribir con exponentes racionales.}$$
$$= (m+n)^{(7/5)-(4/3)} \quad \text{Regla del cociente para exponentes.}$$
$$= (m+n)^{1/15}$$
$$= \sqrt[15]{m+n} \quad \text{Escribir como un radical.}$$

b)
$$\frac{\sqrt[3]{a^5b^4}}{\sqrt{a^2b}} = \frac{(a^5b^4)^{1/3}}{(a^2b)^{1/2}} \quad \text{Escribir con exponentes racionales.}$$
$$= \frac{a^{5/3}b^{4/3}}{ab^{1/2}} \quad \text{Elevar el producto a una potencia.}$$
$$= a^{(5/3)-1}b^{(4/3)-(1/2)} \quad \text{Regla del cociente para exponentes.}$$
$$= a^{2/3}b^{5/6}$$
$$= a^{4/6}b^{5/6} \quad \text{Escribir las fracciones con denominador 6.}$$
$$= (a^4b^5)^{1/6} \quad \text{Reescribir mediante las leyes de exponentes.}$$
$$= \sqrt[6]{a^4b^5} \quad \text{Escribir como un radical.}$$

Ahora resuelva el ejercicio 133

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.5

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. **a)** ¿Qué es el conjugado de un binomio?
   b) ¿Cuál es el conjugado de $x - \sqrt{3}$?
2. ¿Qué significa racionalizar un denominador?
3. **a)** Explique cómo racionalizar un denominador que contiene una expresión radical de un término.
   b) Racionalice $\dfrac{4}{\sqrt{3y}}$ mediante el procedimiento que especificó en la parte **a)**.
4. **a)** Explique cómo racionalizar un denominador que contiene un binomio en el que uno de los términos (o ambos) es una expresión radical.
   b) Racionalice $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ mediante el procedimiento que especificó en la parte **a)**.
5. ¿Cuáles son las tres condiciones que debe cumplir una expresión radical para considerarla simplificada?
6. Explique por qué cada una de las expresiones siguientes no está simplificada.
   a) $\sqrt{x^5}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Simplifique. Suponga que todas las variables representan números reales positivos.

7. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
8. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$
9. $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$
10. $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$
11. $\dfrac{6}{\sqrt{6}}$
12. $\dfrac{17}{\sqrt{17}}$
13. $\dfrac{1}{\sqrt{z}}$
14. $\dfrac{y}{\sqrt{y}}$

15. $\frac{p}{\sqrt{2}}$ 16. $\frac{m}{\sqrt{13}}$ 17. $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{7}}$ 18. $\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{q}}$

19. $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ 20. $\frac{15x}{\sqrt{x}}$ 21. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ 22. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a}}$

23. $\sqrt{\frac{5m}{8}}$ 24. $\frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{y^3}}$ 25. $\frac{2n}{\sqrt{18n}}$ 26. $\sqrt{\frac{120x}{4y^3}}$

27. $\sqrt{\frac{18x^4y^3}{2z^3}}$ 28. $\sqrt{\frac{7pq^4}{2r}}$ 29. $\sqrt{\frac{20y^4z^3}{3xy^{-4}}}$ 30. $\sqrt{\frac{5xy^6}{3z}}$

31. $\sqrt{\frac{48x^6y^5}{3z^3}}$ 32. $\sqrt{\frac{45y^{12}z^{10}}{2x}}$

Simplifique.

33. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 34. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ 35. $\frac{8}{\sqrt[3]{y}}$ 36. $\frac{2}{\sqrt[3]{a^2}}$

37. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ 38. $\frac{z}{\sqrt[4]{4}}$ 39. $\frac{a}{\sqrt[4]{8}}$ 40. $\frac{8}{\sqrt[4]{z}}$

41. $\frac{5}{\sqrt[4]{z^2}}$ 42. $\frac{13}{\sqrt[4]{z^3}}$ 43. $\frac{10}{\sqrt[5]{y^3}}$ 44. $\frac{x}{\sqrt[5]{y^4}}$

45. $\frac{2}{\sqrt[7]{a^4}}$ 46. $\sqrt[3]{\frac{4x}{y}}$ 47. $\sqrt[3]{\frac{1}{2x}}$ 48. $\sqrt[3]{\frac{7c}{9y^2}}$

49. $\frac{5m}{\sqrt[4]{2}}$ 50. $\frac{3}{\sqrt[4]{a}}$ 51. $\sqrt[4]{\frac{5}{3x^3}}$ 52. $\sqrt[4]{\frac{2x^3}{4y^2}}$

53. $\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2y^2}}$ 54. $\sqrt[3]{\frac{15x^6y^7}{2z^2}}$ 55. $\sqrt[3]{\frac{14xy^2}{2z^2}}$ 56. $\sqrt[6]{\frac{r^4s^9}{2r^5}}$

Multiplique.

57. $(5-\sqrt{6})(5+\sqrt{6})$ 58. $(7+\sqrt{3})(7-\sqrt{3})$ 59. $(8+\sqrt{2})(8-\sqrt{2})$ 60. $(6-\sqrt{7})(6+\sqrt{7})$

61. $(2-\sqrt{10})(2+\sqrt{10})$ 62. $(3+\sqrt{17})(3-\sqrt{17})$ 63. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ 64. $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

65. $(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})$ 66. $(5\sqrt{c}-4\sqrt{d})(5\sqrt{c}+4\sqrt{d})$

Simplifique mediante la racionalización del denominador.

67. $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ 68. $\frac{4}{\sqrt{2}+1}$ 69. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ 70. $\frac{3}{5-\sqrt{7}}$

71. $\frac{5}{\sqrt{2}-7}$ 72. $\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ 73. $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-\sqrt{6}}$ 74. $\frac{1}{\sqrt{17}-\sqrt{8}}$

75. $\frac{3}{6+\sqrt{x}}$ 76. $\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{a}-3}$ 77. $\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-y}$ 78. $\frac{\sqrt{8x}}{x+\sqrt{y}}$

79. $\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+4\sqrt{3}}$ 80. $\frac{\sqrt{c}-\sqrt{2d}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}}$ 81. $\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{a^7}}{\sqrt{a}}$ 82. $\frac{2\sqrt{xy}-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

83. $\frac{4}{\sqrt{x+2}-3}$ 84. $\frac{8}{\sqrt{y-3}+6}$

Simplifique. Estos ejercicios son una combinación de los que ya se presentaron antes en esta sección.

85. $\sqrt{\frac{x}{16}}$ 86. $\sqrt[4]{\frac{x^4}{16}}$ 87. $\sqrt{\frac{2}{9}}$ 88. $\sqrt{\frac{a}{b}}$

89. $(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})$ 90. $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ 91. $\sqrt{\frac{24x^3y^6}{5z}}$ 92. $\frac{5}{4-\sqrt{y}}$

93. $\sqrt{\frac{28xy^4}{2x^3y^4}}$ 94. $\frac{8x}{\sqrt[3]{5y}}$ 95. $\frac{1}{\sqrt{a}+7}$ 96. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6\sqrt{y}}$

97. $-\frac{7\sqrt{x}}{\sqrt{98}}$ 98. $\sqrt{\frac{2xy^4}{50xy^2}}$ 99. $\sqrt[4]{\frac{3y^2}{2x}}$ 100. $\sqrt{\frac{49x^2y^5}{3z}}$

101. $\sqrt[3]{\dfrac{32y^{12}z^{10}}{2x}}$ **102.** $\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ **103.** $\dfrac{\sqrt{ar}}{\sqrt{a}-2\sqrt{r}}$ **104.** $\sqrt[4]{\dfrac{2}{9x}}$

105. $\dfrac{\sqrt[3]{6x}}{\sqrt[3]{5xy}}$ **106.** $\dfrac{\sqrt[3]{16m^2n}}{\sqrt[3]{2mn^2}}$ **107.** $\sqrt[4]{\dfrac{2x^7y^{12}z^4}{3x^9}}$ **108.** $\dfrac{9}{\sqrt{y+9}-\sqrt{y}}$

Simplifique.

109. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **110.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **111.** $\sqrt{5}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

112. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ **113.** $4\sqrt{\dfrac{1}{6}}+\sqrt{24}$ **114.** $5\sqrt{3}-\dfrac{3}{\sqrt{3}}+2\sqrt{18}$

115. $5\sqrt{2}-\dfrac{2}{\sqrt{8}}+\sqrt{50}$ **116.** $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{75}$ **117.** $\sqrt{\dfrac{1}{2}}+7\sqrt{2}+\sqrt{18}$

118. $\dfrac{1}{2}\sqrt{18}-\dfrac{3}{\sqrt{2}}-9\sqrt{50}$ **119.** $\dfrac{2}{\sqrt{50}}-3\sqrt{50}-\dfrac{1}{\sqrt{8}}$ **120.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{5}{\sqrt{3}}+\sqrt{12}$

121. $\sqrt{\dfrac{3}{8}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ **122.** $2\sqrt{\dfrac{8}{3}}-4\sqrt{\dfrac{100}{6}}$ **123.** $-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}+3\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

124. $-5x\sqrt{\dfrac{y}{y^2}}+9x\sqrt{\dfrac{1}{y}}$ **125.** $\dfrac{3}{\sqrt{a}}-\sqrt{\dfrac{9}{a}}+2\sqrt{a}$ **126.** $6\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

Simplifique.

127. $\dfrac{\sqrt{(a+b)^4}}{\sqrt[3]{a+b}}$ **128.** $\dfrac{\sqrt[3]{c+2}}{\sqrt[4]{(c+2)^3}}$ **129.** $\dfrac{\sqrt[5]{(a+2b)^4}}{\sqrt[3]{(a+2b)^2}}$ **130.** $\dfrac{\sqrt[6]{(r+3)^5}}{\sqrt[3]{(r+3)^5}}$

131. $\dfrac{\sqrt[3]{r^2s^4}}{\sqrt{rs}}$ **132.** $\dfrac{\sqrt{a^2b^4}}{\sqrt[3]{ab^2}}$ **133.** $\dfrac{\sqrt[5]{x^4y^6}}{\sqrt[3]{(xy)^2}}$ **134.** $\dfrac{\sqrt[6]{4m^8n^4}}{\sqrt[4]{m^4n^2}}$

Resolución de problemas

135. Iluminación En determinadas condiciones, la fórmula

$$d=\sqrt{\frac{72}{I}}$$

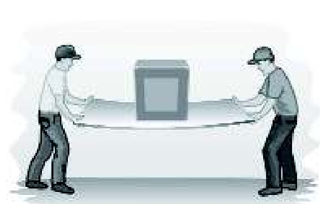
se usa para mostrar la relación entre la iluminación sobre un objeto I, en lúmenes por metro, y la distancia en metros, d, que hay entre el objeto y la fuente de luz. Si la iluminación sobre una persona que está cerca de una fuente de luz es de 5.3 lúmenes por metro, ¿a qué distancia de la fuente de luz se encuentra la persona?

136. Resistencia de una tabla Cuando se aplica suficiente presión sobre una tabla, ésta se rompe. Cuanto mayor sea el grosor de la tabla, mayor será la presión que se necesita para que se rompa. La fórmula

$$T=\sqrt{\frac{0.05\,LB}{M}}$$

relaciona el grosor de una tabla, T, en pulgadas, su longitud, L, en pulgadas, la presión que se ejerce sobre ella, B, en libras y el módulo de ruptura, M, en libras por pulgadas cuadradas. El módulo de ruptura es una constante que se determina de acuerdo con el tipo específico de tabla.

Determine el grosor de una tabla de 36 pulgadas de largo, si el módulo de ruptura es 2560 libras por pulgada cuadrada y la tabla se rompe cuando se le aplica una presión de 800 libras.



137. Volumen de una pecera Un restaurante quiere colocar una pecera esférica en su vestíbulo. El radio, r, en pulgadas, de un tanque esférico se determina mediante la fórmula

$$r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

donde V es el volumen del tanque en pulgadas cúbicas. Determine el radio de un tanque esférico cuyo volumen es de 7238.23 pulgadas cúbicas.



138. Números consecutivos Si consideramos el conjunto de números naturales consecutivos 1, 2, 3, 4, ..., n como la población, la desviación estándar, σ, que es una medida de dispersión de los datos respecto a la media, puede calcularse mediante la fórmula

$$\sigma=\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

donde n representa la cantidad de números naturales en la muestra. Determine la desviación estándar para los primeros 100 números naturales consecutivos.

139. Granjas en Estados Unidos El número de granjas en Estados Unidos está disminuyendo anualmente (aunque el tamaño de las que quedan ha aumentado). Una función que puede usarse para aproximar el número de granjas, $N(t)$, en millones, es

$$N(t) = \frac{6.21}{\sqrt[4]{t}}$$

donde t es años desde 1959 y $1 \le t \le 50$. Estime el número de granjas en Estados Unidos en **a)** 1960, y **b)** 2008.



140. Tasa de mortalidad infantil La tasa de mortalidad infantil, en Estados Unidos, ha disminuido de manera constante. La tasa de mortalidad infantil, $N(t)$, definida como muertes por 1000 niños nacidos vivos, puede aproximarse mediante la función

$$N(t) = \frac{28.46}{\sqrt[3]{t^2}}$$

donde t es años desde 1969 y $1 \le t \le 37$. Estime la tasa de mortalidad infantil en **a)** 1970, y **b)** 2006.

141. ¿Cuál es mayor, $\frac{2}{\sqrt{2}}$ or $\frac{3}{\sqrt{3}}$? Explique.

142. ¿Cuál es mayor, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ o $\frac{2}{\sqrt{3}}$? Explique.

143. ¿Cuál es mayor, $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$ o $2+\sqrt{3}$? (No utilice una calculadora). Explique cómo determinó su respuesta.

144. ¿Cuál es mayor, $\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{75}$ o $\frac{2}{\sqrt{12}} + \sqrt{48} + 2\sqrt{3}$? (No utilice calculadora.) Explique cómo determinó su respuesta.

145. Considere las funciones $f(x) = x^{a/2}$ y $g(x) = x^{b/3}$.

a) Liste tres valores para a, de tal manera que $x^{a/2}$ sea un cuadrado perfecto.

b) Liste tres valores para b, de tal manera que $x^{b/3}$ sea un cubo perfecto.

c) Si $x \ge 0$, determine $(f \cdot g)(x)$.

d) Si $x \ge 0$, determine $(f/g)(x)$.

Racionalice cada denominador.

146. $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$

147. $\frac{3}{\sqrt{2a-3b}}$

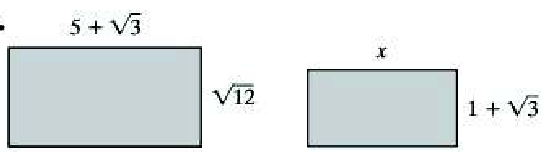
En cursos superiores de matemáticas, puede ser necesario racionalizar los numeradores de las expresiones radicales. Racionalice los numeradores de las expresiones siguientes. (Sus respuestas contendrán radicales en los denominadores.)

148. $\frac{\sqrt{7}}{3}$ **149.** $\frac{5-\sqrt{5}}{6}$ **150.** $\frac{6\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x}$ **151.** $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

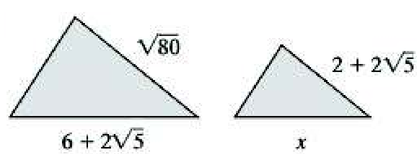
Actividad en grupo

Figuras semejantes *Los dos ejercicios siguientes reforzarán muchos de los conceptos que se han presentado en este capítulo. Resuélvalos en grupo. Asegúrese de que todos los miembros del equipo entiendan cada paso para obtener la solución. Las figuras de cada ejercicio son semejantes; utilice una proporción para determinar la longitud del lado x en cada caso. Escriba la respuesta en forma radical con un denominador racionalizado.*

152.



153.



Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **154.** Despeje b_2 de la ecuación $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$.

[2.4] **155. Vehículos en movimiento** Dos automóviles comienzan un recorrido al mismo tiempo y desde el mismo punto, viajando en direcciones opuestas. Uno viaja 10 millas por hora más rápido que el otro. Si entre ambos automóviles hay 270 millas de distancia después de 3 horas, determine la velocidad de cada uno.

[5.2] **156.** Multiplique $(x-2)(4x^2+9x-2)$.

[6.4] **157.** Resuelva $\frac{x}{2} - \frac{4}{x} = -\frac{7}{2}$.

7.6 Resolución de ecuaciones con radicales

1 Resolver ecuaciones que contienen un radical.
2 Resolver ecuaciones que contienen dos radicales.
3 Resolver ecuaciones que contienen dos términos radicales y un término no radical.
4 Resolver problemas de aplicación mediante ecuaciones radicales.
5 Despejar una variable en un radicando.

1 Resolver ecuaciones que contienen un radical

Una **ecuación radical** es aquella que contiene una variable en un radicando.

Ejemplos de ecuaciones con radicales

$$\sqrt{x} = 5, \qquad \sqrt[3]{y+4} = 9, \qquad \sqrt{x-2} = 7 + \sqrt{x+8}$$

Para resolver ecuaciones radicales

1. Reescriba la ecuación de modo que el radical que contiene a la variable quede solo (aislado) en un lado de la ecuación.
2. Eleve cada lado de la ecuación a una potencia igual al índice del radical.
3. Combine (agrupe y sume) los términos semejantes.
4. Si la ecuación aún contiene un término con una variable en un radicando, repita los pasos 1 a 3.
5. Despeje la variable en la ecuación resultante.
6. Compruebe todas las soluciones en las ecuaciones originales, para detectar la presencia de soluciones extrañas, si las hay.

Recuerde que en la sección 6.4 se dijo que una solución extraña es un número que se obtiene al resolver una ecuación, pero que no es solución de la ecuación original.

Los ejemplos siguientes ilustran el procedimiento para resolver ecuaciones radicales.

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación $\sqrt{x} = 5$.

Solución La raíz cuadrada que contiene a la variable se encuentra sola en un lado de la ecuación. A continuación elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\sqrt{x} = 5$$
$$(\sqrt{x})^2 = (5)^2$$
$$x = 25$$

Compruebe

$$\sqrt{x} = 5$$
$$\sqrt{25} \stackrel{?}{=} 5$$
$$5 = 5 \quad \text{Verdadero}$$

Ahora resuelva el ejercicio 11

EJEMPLO 2 Resuelva.

a) $\sqrt{x-4} - 6 = 0$ **b)** $\sqrt[3]{x} + 10 = 8$ **c)** $\sqrt{x} + 3 = 0$

Solución El primer paso en cada caso consistirá en aislar el término que contiene al radical.

a)

$$\sqrt{x-4} - 6 = 0$$
$$\sqrt{x-4} = 6 \quad \text{Aislar el radical que contiene a la variable.}$$
$$(\sqrt{x-4})^2 = 6^2 \quad \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$
$$x - 4 = 36 \quad \text{Despejar la variable.}$$
$$x = 40$$

Una verificación mostrará que 40 es la solución.

b)

$$\sqrt[3]{x} + 10 = 8$$
$$\sqrt[3]{x} = -2 \quad \text{Aislar el radical que contiene la variable.}$$
$$(\sqrt[3]{x})^3 = (-2)^3 \quad \text{Elevar al cubo ambos lados.}$$
$$x = -8$$

Una comprobación mostrará que -8 es la solución.

c)

$$\sqrt{x} + 3 = 0$$

$$\sqrt{x} = -3 \quad \text{Aislar el radical que contiene a la variable.}$$

$$(\sqrt{x})^2 = (-3)^2 \quad \text{Elevar ambos lados al cuadrado.}$$

$$x = 9$$

Compruebe

$$\sqrt{x} + 3 = 0$$

$$\sqrt{9} + 3 \stackrel{?}{=} 0$$

$$3 + 3 \stackrel{?}{=} 0$$

$$6 = 0 \quad \text{Falso}$$

Una comprobación mostrará que 9 no es una solución. La respuesta a la parte **c)** es "no hay solución real". Podría haberse dado cuenta de que no hay solución real para el problema cuando obtuvo la ecuación $\sqrt{x} = -3$, ya que $\sqrt{x}$ no puede ser igual a un número real negativo.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 17

Sugerencia útil

No olvide verificar sus soluciones en la ecuación original. Recuerde que cuando ambos lados de una ecuación se elevan a una potencia, es posible obtener soluciones extrañas.

Considere la ecuación $x = 2$. Observe lo que ocurre cuando usted eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$x = 2$$

$$x^2 = 2^2$$

$$x^2 = 4$$

Observe que la ecuación $x^2 = 4$ tiene dos soluciones, +2 y −2. Como la ecuación original $x = 2$ sólo tiene una solución, 2, hemos obtenido la solución extraña, −2.

EJEMPLO 3 ▸ Resuelva $\sqrt{2x - 3} = x - 3$.

Solución Como el radical ya está aislado, elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación. Luego resolvemos la ecuación cuadrática resultante.

$$(\sqrt{2x - 3})^2 = (x - 3)^2$$

$$2x - 3 = (x - 3)(x - 3)$$

$$2x - 3 = x^2 - 6x + 9$$

$$0 = x^2 - 8x + 12$$

Ahora factorizamos y utilizamos la propiedad del factor nulo.

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x - 6)(x - 2) = 0$$

$$x - 6 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 6 \qquad\qquad x = 2$$

Compruebe

$x = 6$	$x = 2$
$\sqrt{2x - 3} = x - 3$	$\sqrt{2x - 3} = x - 3$
$\sqrt{2(6) - 3} \stackrel{?}{=} 6 - 3$	$\sqrt{2(2) - 3} \stackrel{?}{=} 2 - 3$
$\sqrt{9} \stackrel{?}{=} 3$	$\sqrt{1} \stackrel{?}{=} -1$
$3 = 3$ Verdadero	$1 = -1$ Falso

Por lo tanto, 6 es una solución para la ecuación, pero 2 no lo es. El 2 es una solución extraña, pues satisface la ecuación $(\sqrt{2x - 3})^2 = (x - 3)^2$, pero no la ecuación original, $\sqrt{2x - 3} = x - 3$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 43

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

En el ejemplo 3 encontramos que la solución de $\sqrt{2x - 3} = x - 3$ es 6. Si hacemos $Y_1 = \sqrt{2x - 3}$ y $Y_2 = x - 3$ y graficamos Y_1 y Y_2 en una calculadora graficadora, obtendremos la **figura 7.3**. Observe que las gráficas parecen intersecarse en $x = 6$, tal como esperábamos.

La tabla de valores de la **figura 7.4** muestra que la coordenada y en el punto de intersección es 3. En la tabla aparece ERROR en la columna de Y_1 para los valores 0 y 1 de x. Para cualquier valor menor que $\frac{3}{2}$, el valor de $2x - 3$ es negativo y, por lo tanto, $\sqrt{2x - 3}$ no es un número real. El dominio de la función Y_1 es $\left\{x \middle| x \geq \frac{3}{2}\right\}$, que puede encontrarse resolviendo la desigualdad $2x - 3 \geq 0$.

Puede utilizar su calculadora graficadora para resolver o comprobar ecuaciones radicales.

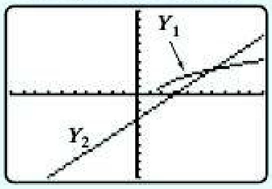
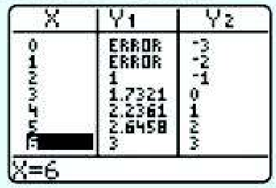


FIGURA 7.3



X	Y1	Y2
0	ERROR	-3
1	ERROR	-2
2	1	-1
3	1.7321	0
4	2.2361	1
5	2.6458	2
6	3	3

X=6

FIGURA 7.4

EJERCICIOS

Utilice su calculadora graficadora para determinar si el valor indicado es la solución para la ecuación radical. Si no es la solución, utilice su graficadora para determinar la respuesta correcta.

1. $\sqrt{2x + 9} = 5(x - 7), 8$
2. $\sqrt{3x + 4} = \sqrt{x + 12}, 6$

EJEMPLO 4 ▸ Resuelva $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$.

Solución En primer lugar, aislamos el término con el radical dejándolo solo en un lado de la ecuación.

$$x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$$
$$-2\sqrt{x} = -x + 3$$
$$2\sqrt{x} = x - 3$$

Ahora elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$(2\sqrt{x})^2 = (x - 3)^2$$
$$4x = x^2 - 6x + 9$$
$$0 = x^2 - 10x + 9$$
$$0 = (x - 1)(x - 9)$$
$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 9 = 0$$
$$x = 1 \qquad\qquad x = 9$$

Compruebe $x = 1$

$$x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$$
$$1 - 2\sqrt{1} - 3 \stackrel{?}{=} 0$$
$$1 - 2(1) - 3 \stackrel{?}{=} 0$$
$$1 - 2 - 3 \stackrel{?}{=} 0$$
$$-4 = 0 \quad \text{Falso}$$

$x = 9$

$$x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$$
$$9 - 2\sqrt{9} - 3 \stackrel{?}{=} 0$$
$$9 - 2(3) - 3 \stackrel{?}{=} 0$$
$$9 - 6 - 3 \stackrel{?}{=} 0$$
$$3 - 3 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \quad \text{Verdadero}$$

La solución es 9. El valor 1 es una solución extraña.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 41

2 Resolver ecuaciones que contienen dos radicales

A continuación analizaremos algunas ecuaciones que contienen dos radicales.

EJEMPLO 5 ▸ Resuelva $\sqrt{9x^2+6} = 3\sqrt{x^2+x-2}$.

Solución Como los dos radicales aparecen en lados diferentes de la ecuación, elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\left(\sqrt{9x^2+6}\right)^2 = \left(3\sqrt{x^2+x-2}\right)^2 \quad \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$
$$9x^2+6 = 9(x^2+x-2)$$
$$9x^2+6 = 9x^2+9x-18 \quad \text{Propiedad distributiva.}$$
$$6 = 9x-18 \quad \text{se restó } 9x^2 \text{ de ambos lados.}$$
$$24 = 9x$$
$$\frac{8}{3} = x$$

Una comprobación mostrará que $\frac{8}{3}$ es la solución.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 27

En cursos superiores de matemáticas, en ocasiones las ecuaciones utilizan exponentes en lugar de radicales. El ejemplo 6 ilustra una de tales ecuaciones.

EJEMPLO 6 ▸ Para $f(x) = 3(x-2)^{1/3}$ y $g(x) = (17x-14)^{1/3}$, determine todos los valores de x para los que $f(x) = g(x)$.

Solución Debe darse cuenta que $f(x)$ y $g(x)$ también se pueden escribir $f(x) = 3\sqrt[3]{x-2}$ y $g(x) = \sqrt[3]{17x-14}$. Por consiguiente, podríamos resolver este ejemplo mediante radicales; sin embargo, lo haremos con exponentes racionales. Primero igualamos las dos funciones y despejamos x.

$$f(x) = g(x)$$
$$3(x-2)^{1/3} = (17x-14)^{1/3}$$
$$[3(x-2)^{1/3}]^3 = [(17x-14)^{1/3}]^3 \quad \text{Elevar al cubo ambos lados.}$$
$$3^3(x-2) = 17x-14$$
$$27(x-2) = 17x-14$$
$$27x-54 = 17x-14$$
$$10x-54 = -14$$
$$10x = 40$$
$$x = 4$$

Una comprobación mostrará que la solución es 4. Si sustituye 4 en $f(x)$ y en $g(x)$, descubrirá que ambas ecuaciones se simplifican a $3\sqrt[3]{2}$. Compruébelo.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 69

En el ejemplo 6, si resuelve la ecuación $3\sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{17x-14}$ obtendrá la solución 4. Ahora, para practicar, compruébelo.

3 Resolver ecuaciones que contienen dos términos radicales y un término no radical

Cuando una ecuación radical contiene dos términos radicales y un tercer término no radical, a veces es necesario elevar ambos lados de la ecuación a una determinada potencia dos veces para obtener la solución. En primer lugar, aísle un término radical.

Después eleve ambos lados de la ecuación a una potencia dada. Esto eliminará uno de los radicales. A continuación, aísle el radical restante en un lado de la ecuación; después eleve ambos lados de la ecuación a la potencia dada una segunda vez. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 ▸ Resuelva $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} = 1$.

Solución Debemos aislar un término radical en un lado de la ecuación. Comenzaremos por sumar $\sqrt{3x-2}$ a ambos lados de la ecuación para aislar $\sqrt{5x-1}$. Después elevaremos al cuadrado ambos lados de la ecuación y reduciremos los términos semejantes.

$$\sqrt{5x-1} = 1 + \sqrt{3x-2} \quad \text{Aislar } \sqrt{5x-1}.$$
$$(\sqrt{5x-1})^2 = (1 + \sqrt{3x-2})^2 \quad \text{Elevar ambos lados al cuadrado.}$$
$$5x - 1 = (1 + \sqrt{3x-2})(1 + \sqrt{3x-2}) \quad \text{Escribir como un producto.}$$
$$5x - 1 = 1 + \sqrt{3x-2} + \sqrt{3x-2} + (\sqrt{3x-2})^2 \quad \text{Multiplicar.}$$
$$5x - 1 = 1 + 2\sqrt{3x-2} + 3x - 2 \quad \text{Reducir términos semejantes; simplificar.}$$
$$5x - 1 = 3x - 1 + 2\sqrt{3x-2} \quad \text{Reducir términos semejantes.}$$
$$2x = 2\sqrt{3x-2} \quad \text{Aislar el término radical.}$$
$$x = \sqrt{3x-2} \quad \text{Ambos lados se dividieron entre 2.}$$

Hemos aislado el término radical restante. Después de esto elevaremos al cuadrado ambos lados de la ecuación y despejaremos x.

$$x = \sqrt{3x-2}$$
$$x^2 = (\sqrt{3x-2})^2 \quad \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$
$$x^2 = 3x - 2$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$(x-2)(x-1) = 0$$
$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0$$
$$x = 2 \qquad\qquad x = 1$$

Una comprobación mostrará que 2 y 1 son soluciones de la ecuación.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 61**

EJEMPLO 8 ▸ Para $f(x) = \sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2}$, determine todos los valores de x para los que $f(x) = 1$.

Solución Sustituya $f(x)$ por 1. Esto da

$$1 = \sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2}$$

Como ésta es la misma ecuación que la que resolvimos en el ejemplo 7, las respuestas son $x = 2$ y $x = 1$. Verifique que $f(2) = 1$ y $f(1) = 1$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 121**

Cómo evitar errores comunes

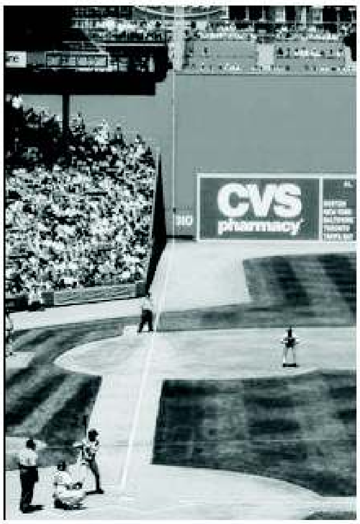
En el capítulo 5 establecimos que $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$. Sea cuidadoso cuando eleve al cuadrado un binomio como $1 + \sqrt{x}$. Analice con atención los siguientes cálculos, para que no cometa el error que se muestra a la derecha.

CORRECTO	INCORRECTO
$(1 + \sqrt{x})^2 = (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})$	~~$(1 + \sqrt{x})^2 = 1^2 + (\sqrt{x})^2$~~
P I E S	
$= 1 + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{x}$	~~$= 1 + x$~~
$= 1 + 2\sqrt{x} + x$	

4 Resolver problemas de aplicación mediante ecuaciones radicales

Ahora veremos algunas de las muchas aplicaciones de los radicales para resolver problemas.

EJEMPLO 9 ▸ **El Monstruo Verde** En el parque Fenway, donde juegan béisbol los Medias Rojas de Boston, la distancia de home a la pared del jardín izquierdo, por la línea de tercera base, es de 310 pies. En el jardín izquierdo al final de la línea existe una barda perpendicular al jardín que tiene una altura de 37 pies. A esta barda se le conoce como *El Monstruo Verde* (vea la fotografía). Determine la distancia del home a la parte superior del Monstruo Verde a lo largo de la línea de la tercera base.



Solución **Entienda el problema** En la **figura 7.5** se ilustra el problema. Necesitamos determinar la distancia que hay del home a la pared del jardín izquierdo.

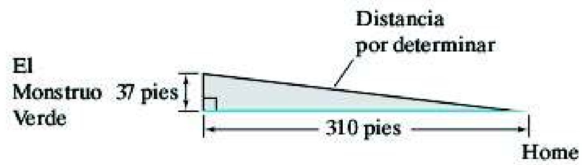


FIGURA 7.5

Traduzca Para resolver el problema utilizaremos el teorema de Pitágoras que se comentó anteriormente: $\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$, o $a^2 + b^2 = c^2$.

$$310^2 + 37^2 = c^2 \qquad \text{Sustituir los valores conocidos.}$$

Realice los cálculos

$$96{,}100 + 1369 = c^2$$
$$97{,}469 = c^2$$
$$\sqrt{97{,}469} = \sqrt{c^2} \qquad \text{Tomar la raíz cuadrada de ambos lados.}$$
$$\sqrt{97{,}469} = c \qquad \text{* Vea la nota a pie de página.}$$
$$312.20 \approx c$$

Responda La distancia entre el home y la parte superior de la barda es de alrededor de 312.20 pies.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 99**

EJEMPLO 10 ▸ **Periodo de un péndulo** El tiempo que tarda un péndulo en realizar una oscilación completa se denomina *periodo*. Vea la **figura 7.6**. El periodo de un péndulo, T, en segundos, puede calcularse mediante la fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$, donde L es la longitud del péndulo, en pies. Determine el periodo de un péndulo si su longitud de 5 pies.

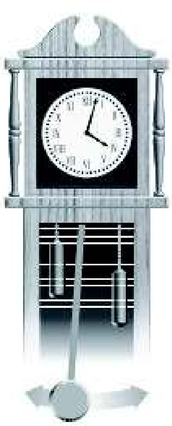


FIGURA 7.6

Solución Sustituya L por 5 y π por 3.14 en la fórmula. Si su calculadora tiene la tecla π utilícela para introducir π.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$$
$$\approx 2(3.14)\sqrt{\frac{5}{32}}$$
$$\approx 2(3.14)\sqrt{0.15625} \approx 2.48$$

Así, el periodo es de más o menos 2.48 segundos. Si tiene un reloj de pared con un péndulo de 5 pies, le tomará alrededor de 2.48 segundos dar una oscilación completa.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 103**

*$c^2 = 97{,}469$ tiene dos soluciones: $c = \sqrt{97{,}469}$ y $c = -\sqrt{97{,}469}$. Como lo que estamos tratando de determinar es una longitud (que debe ser una cantidad positiva), utilizamos la raíz positiva.

5 Despejar una variable en un radicando

Es posible que le den una fórmula y le pidan que despeje una variable que está en un radicando. Para hacerlo, siga el mismo procedimiento general que usó para resolver una ecuación radical. Empiece por aislar la expresión radical; luego eleve ambos lados de la ecuación a la misma potencia que el índice del radical. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 11 **b)**.

EJEMPLO 11 **Error de estimación** Una fórmula estadística para determinar el error máximo de estimación es $E = Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

a) Determine E si $Z = 1.28$, $\sigma = 10$ y $n = 36$.

b) Despeje n de esta ecuación.

Solución

a) $E = Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.28\left(\frac{10}{\sqrt{36}}\right) = 1.28\left(\frac{10}{6}\right) \approx 2.13$

b) Primero multiplique ambos lados de la ecuación por $\sqrt{n}$ para eliminar las fracciones. Luego aísle $\sqrt{n}$. Por último, despeje n elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$E = Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n}(E) = \left(Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n} \qquad \text{Eliminar fracciones.}$$

$$\sqrt{n}(E) = Z\sigma$$

$$\sqrt{n} = \frac{Z\sigma}{E} \qquad \text{Aislar el término con radical.}$$

$$(\sqrt{n})^2 = \left(\frac{Z\sigma}{E}\right)^2 \qquad \text{Elevar ambos lados al cuadrado.}$$

$$n = \left(\frac{Z\sigma}{E}\right)^2 \quad \text{o} \quad n = \frac{Z^2\sigma^2}{E^2}$$

Ahora resuelva el ejercicio 75

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.6

Ejercicios de concepto/redacción

1. **a)** Explique cómo resolver una ecuación radical.
   b) Utilizando el procedimiento que indicó en la parte **a)**, resuelva $\sqrt{2x + 26} - 2 = 4$
2. Considere la ecuación $\sqrt{x + 3} = -\sqrt{2x - 1}$. Explique por qué esta ecuación no puede tener soluciones reales.
3. Analice la ecuación $-\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2}$. ¿puede determinar su solución? Explique.
4. Analice la ecuación $\sqrt[3]{x^2} = -\sqrt[3]{x^2}$. ¿puede determinar su solución? Explique.
5. Sin resolver la ecuación, explique cómo puede saber que $\sqrt{x - 3} + 4 = 0$ no tiene solución.
6. ¿Por qué es necesario comprobar las soluciones de las ecuaciones radicales?
7. La ecuación $\sqrt{x} = 5$ ¿tiene una o dos soluciones? Explique.
8. La ecuación $x^2 = 9$, ¿tiene una o dos soluciones? Explique.

Práctica de habilidades

Resuelva y compruebe su o sus soluciones. Si la ecuación no tiene soluciones reales, indíquelo.

9. $\sqrt{x} = 4$	**10.** $\sqrt{x} = 13$	**11.** $\sqrt{x} = -9$
12. $\sqrt[3]{x} = 4$	**13.** $\sqrt[3]{x} = -4$	**14.** $\sqrt{a} + 5 = 0$
15. $\sqrt{2x + 3} = 5$	**16.** $\sqrt[3]{7x - 6} = 4$	**17.** $\sqrt[3]{3x} + 4 = 7$
18. $2\sqrt{4x + 5} = 14$	**19.** $\sqrt[3]{2x + 29} = 3$	**20.** $\sqrt[3]{6x + 2} = -4$
21. $\sqrt[4]{x} = 3$	**22.** $\sqrt[4]{x} = -3$	**23.** $\sqrt[4]{x + 10} = 3$

24. $\sqrt[4]{3x-2}=2$
25. $\sqrt[4]{2x+1}+6=2$
26. $\sqrt{2x}+7=13$
27. $\sqrt{x+8}=\sqrt{x-8}$
28. $\sqrt{r+5}+7=10$
29. $2\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{x^2+2x}$
30. $\sqrt[3]{6t-1}=\sqrt[3]{2t+3}$
31. $\sqrt[4]{x+8}=\sqrt[4]{2x}$
32. $\sqrt[4]{3x-1}+4=0$
33. $\sqrt{5x+1}-6=0$
34. $\sqrt{x^2+12x+3}=-x$
35. $\sqrt{m^2+6m-4}=m$
36. $\sqrt{x^2+3x+12}=x$
37. $\sqrt{5c+1}-9=0$
38. $\sqrt{b^2-2}=b+4$
39. $\sqrt{z^2+5}=z+1$
40. $\sqrt{x}+6x=1$
41. $\sqrt{2y+5}+5-y=0$
42. $\sqrt{4x+1}=\frac{1}{2}x+2$
43. $\sqrt{5x+6}=2x-6$
44. $\sqrt{4b+5}+b=10$
45. $(2a+9)^{1/2}-a+3=0$
46. $(3x+4)^{1/2}-x=-2$
47. $(2x^2+4x+9)^{1/2}=(2x^2+9)^{1/2}$
48. $(2x+1)^{1/2}+7=x$
49. $(r+4)^{1/3}=(3r+10)^{1/3}$
50. $(7x+6)^{1/3}+4=0$
51. $(5x+7)^{1/4}=(9x+1)^{1/4}$
52. $(5b+3)^{1/4}=(2b+17)^{1/4}$
53. $\sqrt[4]{x+5}=-2$
54. $\sqrt{x^2+x-1}=-\sqrt{x+3}$

Resuelva. Tendrá que elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación dos veces para eliminar todos los radicales.

55. $\sqrt{4x+1}=\sqrt{2x}+1$
56. $3\sqrt{b}-1=\sqrt{b+21}$
57. $\sqrt{3a+1}=\sqrt{a-4}+3$
58. $\sqrt{x+1}=2-\sqrt{x}$
59. $\sqrt{x+3}=\sqrt{x}-3$
60. $\sqrt{y+1}=2+\sqrt{y-7}$
61. $\sqrt{x+7}=6-\sqrt{x-5}$
62. $\sqrt{b-3}=4-\sqrt{b+5}$
63. $\sqrt{4x-3}=2+\sqrt{2x-5}$
64. $\sqrt{r+10}+2+\sqrt{r-5}=0$
65. $\sqrt{y+1}=\sqrt{y+10}-3$
66. $3+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x+12}$

Determine todos los valores reales de x donde f(x) = g(x) en cada par de funciones.

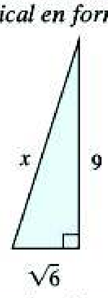
67. $f(x)=\sqrt{x+8},\ g(x)=\sqrt{2x+1}$
68. $f(x)=\sqrt{x^2-6x+10},\ g(x)=\sqrt{x-2}$
69. $f(x)=\sqrt[3]{5x-19},\ g(x)=\sqrt[3]{6x-23}$
70. $f(x)=(14x-8)^{1/2},\ g(x)=2(3x+2)^{1/2}$
71. $f(x)=2(8x+24)^{1/3},\ g(x)=4(2x-2)^{1/3}$
72. $f(x)=2\sqrt{x+2},\ g(x)=8-\sqrt{x+14}$

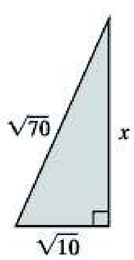
Despeje la variable indicada en cada fórmula.

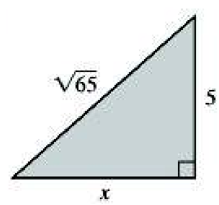
73. $p=\sqrt{2v}$, para v
74. $l=\sqrt{4r}$, para r
75. $v=\sqrt{2gh}$, para g
76. $v=\sqrt{\frac{2E}{m}}$, para E
77. $v=\sqrt{\frac{FR}{M}}$, para F
78. $w=\sqrt{\frac{a_0}{b_0}}$, para b_0
79. $x=\sqrt{\frac{m}{k}}V_0$, para m
80. $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$, para L
81. $r=\sqrt{\frac{A}{\pi}}$, para A
82. $r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, para V

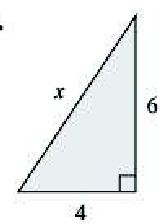
Resolución de problemas

Utilice el teorema de Pitágoras para determinar la longitud del lado desconocido de cada triángulo. Escriba la respuesta como un radical en forma simplificada.

83.


84.


85.


86.


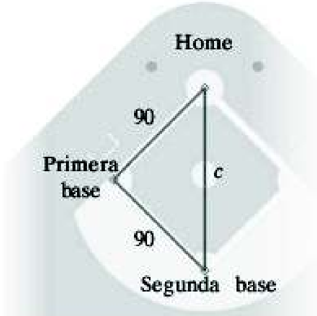
Resuelva. Necesitará elevar al cuadrado dos veces ambos lados de la ecuación.

87. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=\sqrt{x-3}$
88. $\sqrt{2x}-\sqrt{x-4}=\sqrt{12-x}$
89. $\sqrt{4y+6}+\sqrt{y+5}=\sqrt{y+1}$
90. $\sqrt{2b-2}+\sqrt{b-5}=\sqrt{4b}$
91. $\sqrt{c+1}+\sqrt{c-2}=\sqrt{3c}$
92. $\sqrt{2t-1}+\sqrt{t-4}=\sqrt{3t+1}$
93. $\sqrt{a+2}-\sqrt{a-3}=\sqrt{a-6}$
94. $\sqrt{r-1}-\sqrt{r+6}=\sqrt{r-9}$

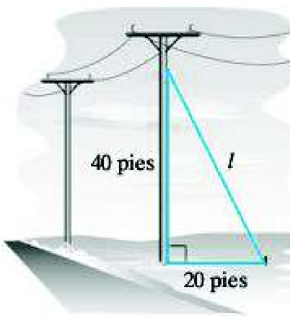
Resuelva. Necesitará elevar al cuadrado dos veces ambos lados de la ecuación.

95. $\sqrt{2-\sqrt{x}}=\sqrt{x}$
96. $\sqrt{6+\sqrt{x+4}}=\sqrt{2x-1}$
97. $\sqrt{2+\sqrt{x+1}}=\sqrt{7-x}$
98. $\sqrt{1+\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-6}$

99. **Diamante de béisbol** Un diamante regular de béisbol es un cuadrado con 90 pies de base a base. ¿A qué distancia está la segunda base del home?



100. **Poste telefónico** Como se muestra en la figura, un poste telefónico forma un ángulo recto o de 90° respecto del piso. Determine la longitud del alambre que conecta al poste a 40 pies del piso, y que está anclado al piso a 20 pies desde la base el poste.



101. **Lado de un jardín** Si conoce el área de un cuadrado, la longitud de cada uno de sus lados puede determinarse mediante la fórmula $s = \sqrt{A}$. Determine cuánto miden los lados del jardín cuadrado de Tom Kim, si su área mide 169 pies cuadrados.

102. **Radio de un aro de baloncesto** Si conoce el área de un círculo, es posible determinar su radio mediante la fórmula $r = \sqrt{A/\pi}$.



a) Determine el radio de un aro de baloncesto, si su área interior mide 254.47 pulgadas cuadradas.

b) Si un balón tiene 9 pulgadas de diámetro, ¿cuál es la distancia mínima posible entre el aro y el balón, cuando el centro de este último está en el centro de aro?

103. **Periodo de un péndulo** La fórmula para determinar el periodo de un péndulo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

donde T es el periodo en segundos, l es la longitud del péndulo en pies, y g es la aceleración provocada por la gravedad. En la Tierra, la gravedad es de 32 pies/segundo^2. La fórmula, cuando se utiliza para la Tierra, se convierte en

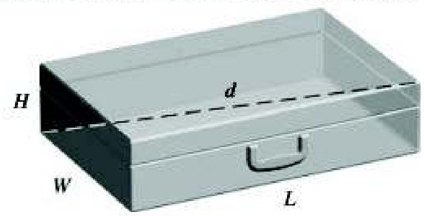
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{32}}$$

a) Determine el periodo de un péndulo que mide 8 pies de longitud.

b) Si la longitud de un péndulo se duplica, ¿qué efecto tiene en el periodo? Explique.

c) La gravedad en la Luna es 1/6 de la terrestre. Si un péndulo tiene un periodo de 2 segundos en la Tierra, ¿cuál será el periodo del mismo péndulo en la Luna?

104. **Diagonal de un portafolio** Una fórmula para determinar la longitud de la diagonal de una caja (es decir la distancia que hay entre su esquina superior y su esquina inferior opuesta) es $d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$, donde L, W y H son el largo, ancho y altura de la caja, respectivamente.



a) Determine la longitud de la diagonal de un portafolio que mide 22 pulgadas de largo, 15 pulgadas de ancho y 12 pulgadas de altura.

b) Si el largo, ancho y la altura se duplican, ¿cómo cambiará la diagonal?

c) Despeje W en la fórmula.

105. **Flujo de sangre en una arteria** La fórmula

$$r = \sqrt[4]{\frac{8\mu l}{\pi R}}$$

se utiliza para determinar el flujo de sangre que pasa a través de las arterias. En la fórmula, R representa la resistencia que ofrece la arteria al paso de la sangre, μ es la viscosidad de la sangre, l es la longitud de la arteria, y r es el radio de la arteria. Despeje R de esta ecuación.

106. **Objeto que cae** La fórmula

$$t = \frac{\sqrt{19.6s}}{9.8}$$

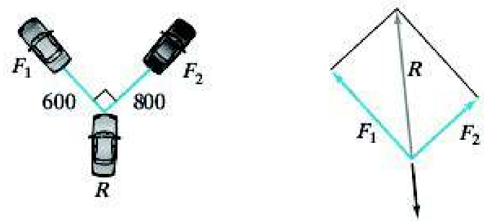
puede usarse para establecer el tiempo, t, en segundos, que un objeto ha estado cayendo, si ha caído s metros. Suponga que un objeto se ha dejado caer desde un helicóptero y ha caído 100 metros. ¿Cuánto tiempo ha estado en caída libre?

107. **Días terrestres** Un "año" es el tiempo que tarda cualquiera de los planetas de nuestro sistema solar en dar una vuelta completa alrededor del Sol. El número de días terrestres a que equivale un año de otro planeta, N, se calcula mediante la fórmula $N = 0.2(\sqrt{R})^3$, donde R es la distancia media que hay entre el planeta y el Sol, en millones de kilómetros. Determine el número de días terrestres que dura el año del planeta Tierra, cuya distancia media al Sol es de 149.4 millones de kilómetros.



108. Días terrestres Determine el número de días terrestres que dura el año del planeta Mercurio, cuya distancia media al Sol es de 58 millones de kilómetros. Vea el ejercicio 107.

109. Fuerzas sobre un automóvil Cuando dos fuerzas, F_1 y F_2, jalan formando un ángulo recto entre sí, como se muestra la siguiente figura, podemos determinar la fuerza resultante, o fuerza efectiva, R, mediante la fórmula $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$. Dos automóviles intentan sacar a otro del fango, como se muestra a continuación. Si el automóvil A ejerce una fuerza de 60 libras y el automóvil B ejerce una fuerza de 80 libras, determine la fuerza resultante sobre el automóvil atascado en el fango.



110. Velocidad de escape La velocidad de escape es la velocidad que necesita una nave espacial para escapar del campo gravitacional de un planeta, y se determina mediante la fórmula $v_e = \sqrt{2gR}$, donde g es la fuerza de gravedad del planeta, y R es el radio del planeta. Determine la velocidad de escape de la Tierra, en metros por segundo, donde $g = 9.75\ m/s^2$ y $R = 6{,}370{,}000$ metros.

111. Oleaje Una fórmula que se utiliza para estudiar el movimiento ondulatorio en aguas poco profundas es $c = \sqrt{gH}$, donde c es la velocidad de ola, H es la profundidad del agua, y g es la aceleración provocada por la gravedad. Determine la velocidad de la ola, si la profundidad del agua es de 10 pies. (Utilice $g = 32$ pies/seg^2).



112. Diagonal de una caja La tapa de una caja rectangular mide 20 por 32 pulgadas. Determine la longitud de su diagonal.

113. Jardín floral Un jardín floral con forma rectangular mide 25 por 32 metros. Determine la longitud de la diagonal del jardín.

114. Velocidad del sonido Cuando el sonido recorre el aire (o cualquier gas), la velocidad de la onda sonora depende de la temperatura del aire (o gas). La velocidad, v, en metros por segundo, a la temperatura del aire, t, en grados Celsius, puede determinarse mediante la fórmula

$$v = 331.3\sqrt{1 + \frac{t}{273}}$$

Determine la velocidad del sonido en aire cuya temperatura es de 20°C (equivalente a 68°F).

Una fórmula que ya hemos mencionado y que analizaremos pronto con más detalle, es la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

115. Determine x cuando $a = 1, b = 0, c = -4$.

116. Determine x cuando $a = 1, b = 1, c = -12$.

117. Determine x cuando $a = -1, b = 4, c = 5$.

118. Determine x cuando $a = 2, b = 5, c = -12$.

Dada $f(x)$, determine todos los valores de x para los que $f(x)$ tiene el valor indicado.

119. $f(x) = \sqrt{x - 5}, f(x) = 5$

120. $f(x) = \sqrt[3]{2x + 3}, f(x) = 3$

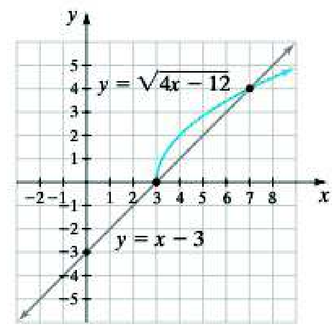
121. $f(x) = \sqrt{3x^2 - 11} + 7, f(x) = 15$

122. $f(x) = 8 + \sqrt[3]{x^2 + 152}, f(x) = 14$

123. a) Considere la ecuación $\sqrt{4x - 12} = x - 3$. Si igualamos cada lado de la ecuación con y, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$y = \sqrt{4x - 12}$$
$$y = x - 3$$

En la figura siguiente se muestran las gráficas de las ecuaciones del sistema.



A partir de la gráfica, determine los valores que parecen ser soluciones de la ecuación $\sqrt{4x - 12} = x - 3$. Explique cómo determinó su respuesta.

b) Sustituya los valores determinados en la parte **a)** de la ecuación original, y determine si son soluciones a la ecuación.

c) Resuelva la ecuación $\sqrt{4x - 12} = x - 3$ en forma algebraica, e indique si su solución concuerda con los valores obtenidos en la parte **a)**.

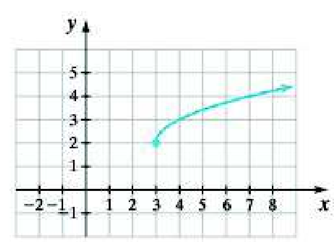
124. Si la gráfica de una función radical $f(x)$ no interseca al eje x, entonces la ecuación $f(x) = 0$ no tiene soluciones reales. Explique por qué.

125. Suponga que se nos da una función racional $g(x)$. Si $g(4) = 0$, entonces la gráfica de $g(x)$ debe intersecar al eje x en 4. Explique por qué.

126. La gráfica de la ecuación $y = \sqrt{x - 3} + 2$ se ilustra en la siguiente figura.

a) ¿Cuál es el dominio de la función?

b) ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $\sqrt{x - 3} + 2 = 0$? Liste todas las soluciones reales. Explique cómo determinó su respuesta.



127. Intervalo de confianza En estadística, un "intervalo de confianza" es un rango de valores donde es probable encontrar el valor verdadero de la población. Para un "intervalo de confianza de 95%", los límites, inferior, L_1, y superior, L_2, del rango pueden determinarse mediante las fórmulas

$$L_1 = p - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$L_2 = p + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

donde p representa el porcentaje obtenido de una muestra, y n es el tamaño de la muestra. Franceso, un estadístico, realiza una encuesta en una muestra de 36 familias y determina que 60% de ellas utiliza una máquina contestadora en su casa. Él puede estar 95% seguro de que el porcentaje verdadero de familias que utilizan una máquina contestadora está entre L_1 y L_2. Determine los valores de L_1 y L_2. Utilice $p = 0.60$ y $n = 36$ en las fórmulas.

128. Media cuadrática La *media cuadrática* (o *raíz cuadrada media, RCM*) con frecuencia se utiliza en la solución de problemas de física. Por ejemplo, en sistemas de distribución de potencia, muchas veces se hace referencia a los voltajes y las corrientes en términos de sus valores RCM. La media cuadrática de un conjunto de valores se obtiene elevando al cuadrado cada valor y sumando los resultados (representados por Σx^2), luego dividir el valor obtenido entre el número de valores y tomar la raíz cuadrada del mismo. Podemos expresar esta fórmula como

$$\text{media cuadrática} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}$$

Determine la media cuadrática de los números 2, 4 y 10.

En los ejercicios 129 y 130, resuelva la ecuación.

129. $\sqrt{x^2+49} = (x^2+49)^{1/2}$

130. $\sqrt{x^2-16} = (x^2-16)^{1/2}$

En los ejercicios 131 a 134, utilice su calculadora graficadora para resolver las ecuaciones. Redondee sus soluciones al décimo más cercano.

131. $\sqrt{x+8} = \sqrt{3x+5}$

132. $\sqrt{10x-16} - 15 = 0$

133. $\sqrt[3]{5x^2-6} - 4 = 0$

134. $\sqrt[3]{5x^2-22} = \sqrt[3]{4x+83}$

Retos

Resuelva.

135. $\sqrt{\sqrt{x+25} - \sqrt{x}} = 5$

136. $\sqrt{\sqrt{x+9} + \sqrt{x}} = 3$

Despeje n en cada ecuación.

137. $z = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

138. $z = \dfrac{p' - p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$

Actividad en grupo

Analicen y respondan en grupo el ejercicio 139.

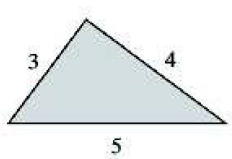
139. Fórmula de Herón El área de un triángulo es $A = \frac{1}{2}bh$.

Si se desconoce la altura pero se sabe cuánto miden sus tres lados, podemos utilizar la fórmula de Herón para determinar el área, A. La fórmula de Herón es

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

donde a, b y c son las longitudes de los tres lados y

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$



a) Cada miembro del grupo utilizará la fórmula de Herón para determinar el área de un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 pulgadas.

b) Comparen las respuestas que dieron a la parte **a)**. Si algún miembro del grupo obtuvo una respuesta incorrecta, discutan en qué consistió el error.

c) Cada miembro del grupo realizará los pasos siguientes:

1. Dibuje un triángulo en la cuadrícula. Coloque cada vértice del triángulo en la intersección de dos líneas de la cuadrícula.



2. Mida con una regla la longitud de cada lado de su triángulo.
3. Utilice la fórmula de Herón para determinar el área de su triángulo.
4. Comparen y analicen sus resultados de la parte **c)**.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **140.** Despeje P_2 de la fórmula $P_1P_2 - P_1P_3 = P_2P_3$.

[6.1] **141.** Simplifique $\dfrac{x(x-5)+x(x-2)}{2x-7}$.

Realice cada operación que se indica.

[6.1] **142.** $\dfrac{4a^2-9b^2}{4a^2+12ab+9b^2}\cdot\dfrac{6a^2b}{8a^2b^2-12ab^3}$

143. $(t^2-2t-15)\div\dfrac{t^2-9}{t^2-3t}$

[6.2] **144.** $\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{2x}{x^2-9}$

[6.4] **145.** Resuelva $2+\dfrac{3x}{x-1}=\dfrac{8}{x-1}$.

7.7 Números complejos

1 Reconocer un número complejo.
2 Sumar y restar números complejos.
3 Multiplicar números complejos.
4 Dividir números complejos.
5 Determinar potencias de i.

1 Reconocer un número complejo

En la sección 7.1 mencionamos que las raíces cuadradas de números negativos, como $\sqrt{-4}$ no son números reales. Números como $\sqrt{-4}$ se denominan **números imaginarios**, se llaman así, porque muchos matemáticos rechazaban su existencia cuando se introdujeron. Aunque no pertenecen al conjunto de los números reales, por definición los números imaginarios existen y son muy útiles en matemáticas y ciencias.

Todo número imaginario tiene a $\sqrt{-1}$ como factor. El número $\sqrt{-1}$, llamado **unidad imaginaria**, con frecuencia se denota con la letra i.

Unidad imaginaria

$$i=\sqrt{-1}$$

Para escribir la raíz cuadrada de un número negativo en términos de i, se usa la siguiente propiedad.

Raíz cuadrada de un número negativo

Para cualquier número real positivo n,

$$\sqrt{-n}=\sqrt{-1}\,\sqrt{n}=i\sqrt{n}$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$\sqrt{-4}=\sqrt{-1}\,\sqrt{4}=i2 \quad \text{o} \quad 2i$$
$$\sqrt{-9}=\sqrt{-1}\,\sqrt{9}=i3 \quad \text{o} \quad 3i$$
$$\sqrt{-7}=\sqrt{-1}\,\sqrt{7}=i\sqrt{7}$$

Por lo general, en este libro escribiremos $i\sqrt{7}$ en vez de $\sqrt{7}i$ para evitar confusiones con $\sqrt{7i}$. También $3\sqrt{5}i$ se escribirá como $3i\sqrt{5}$.

Ejemplos

$\sqrt{-81}=9i$ $\qquad$ $\sqrt{-6}=i\sqrt{6}$

$\sqrt{-49}=7i$ $\qquad$ $\sqrt{-10}=i\sqrt{10}$

El sistema de los números reales es parte de un sistema de números más grande, denominado *sistema de números complejos*. A continuación analizamos a los **números complejos**.

Número complejo

Todo número con la forma

$$a+bi$$

donde a y b son números reales, es un **número complejo**.

Todos los números reales y todos los números imaginarios son también números complejos. Un número complejo tiene dos partes: una parte real, a, y una parte imaginaria, b.

Parte real → $a + bi$ ← Parte imaginaria

Si $b = 0$, el número complejo es un número real. Si $a = 0$, el número complejo es un *número imaginario puro*.

Ejemplos de números complejos

$3 + 2i$	$a = 3, b = 2$	
$5 - i\sqrt{6}$	$a = 5, b = -\sqrt{6}$	
4	$a = 4, b = 0$	(número real, $b = 0$)
$8i$	$a = 0, b = 8$	(número imaginario, $a = 0$)
$-i\sqrt{7}$	$a = 0, b = -\sqrt{7}$	(número imaginario, $a = 0$)

Hemos dicho que todos los números reales e imaginarios son también números complejos. En la **figura 7.7** se muestra la relación entre los diversos conjuntos de números.

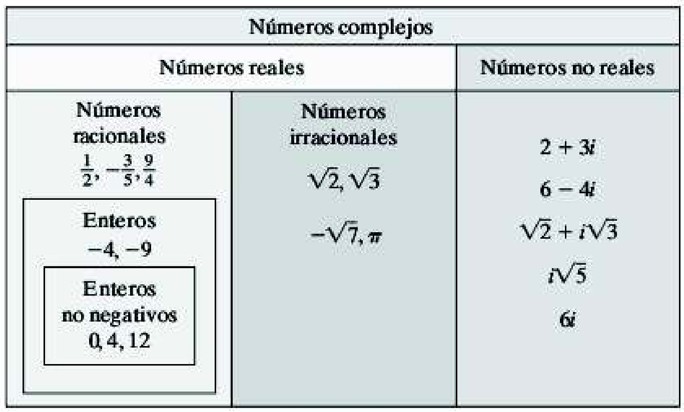


FIGURA 7.7

EJEMPLO 1 ▸ Escriba cada uno de los siguientes números complejos en la forma $a + bi$.

a) $7 + \sqrt{-36}$ **b)** $4 - \sqrt{-12}$ **c)** 19 **d)** $\sqrt{-50}$ **e)** $6 + \sqrt{10}$

Solución

a) $7 + \sqrt{-36} = 7 + \sqrt{-1}\,\sqrt{36}$
$= 7 + i6 \quad \text{o} \quad 7 + 6i$

b) $4 - \sqrt{-12} = 4 - \sqrt{-1}\,\sqrt{12}$
$= 4 - \sqrt{-1}\,\sqrt{4}\,\sqrt{3}$
$= 4 - i(2)\sqrt{3} \quad \text{or} \quad 4 - 2i\sqrt{3}$

c) $19 = 19 + 0i$

d) $\sqrt{-50} = 0 + \sqrt{-50}$
$= 0 + \sqrt{-1}\,\sqrt{25}\,\sqrt{2}$
$= 0 + i(5)\sqrt{2} \quad \text{o} \quad 0 + 5i\sqrt{2}$

e) Tanto 6 como $\sqrt{10}$ son números reales. Si escribimos la expresión como un número complejo, obtenemos $(6 + \sqrt{10}) + 0i$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 23

Los números complejos pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse. Para realizar estas operaciones, utilizamos el hecho de que $i = \sqrt{-1}$ y de

Definición de i^2

$$i^2 = -1$$

2 Sumar y restar números complejos

A continuación se explica cómo sumar y restar números complejos.

Para sumar y restar números complejos

1. Cambie todos los números imaginarios a la forma bi.
2. Sume (o reste) las partes reales de los números complejos.
3. Sume (o reste) las partes imaginarias de los números complejos.
4. Escriba la respuesta en la forma $a + bi$.

EJEMPLO 2 Sume $(9 + 15i) + (-6 - 2i) + 18$.

Solución

$$\begin{aligned}(9 + 15i) + (-6 - 2i) + 18 &= 9 + 15i - 6 - 2i + 18 \\ &= 9 - 6 + 18 + 15i - 2i && \text{Reacomodar términos.} \\ &= 21 + 13i && \text{Reducir los términos semejantes.}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 27

EJEMPLO 3 Reste $(8 - \sqrt{-27}) - (-3 + \sqrt{-48})$.

Solución

$$\begin{aligned}(8 - \sqrt{-27}) - (-3 + \sqrt{-48}) &= (8 - \sqrt{-1}\sqrt{27}) - (-3 + \sqrt{-1}\sqrt{48}) \\ &= (8 - \sqrt{-1}\sqrt{9}\sqrt{3}) - (-3 + \sqrt{-1}\sqrt{16}\sqrt{3}) \\ &= (8 - 3i\sqrt{3}) - (-3 + 4i\sqrt{3}) \\ &= 8 - 3i\sqrt{3} + 3 - 4i\sqrt{3} \\ &= 8 + 3 - 3i\sqrt{3} - 4i\sqrt{3} \\ &= 11 - 7i\sqrt{3}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 35

3 Multiplicar números complejos

Ahora veamos cómo multiplicar números complejos.

Para multiplicar números complejos

1. Cambie todos los números imaginarios a la forma bi.
2. Multiplique los números complejos como si multiplicara polinomios.
3. Sustituya cada aparición de i^2 con -1.
4. Reduzca las partes reales e imaginarias. Escriba la respuesta en la forma $a + bi$.

EJEMPLO 4 Multiplique.

a) $5i(6 - 2i)$ **b)** $\sqrt{-9}(\sqrt{-3} + 8)$ **c)** $(2 - \sqrt{-18})(\sqrt{-2} + 5)$

Solución

a)
$$\begin{aligned}5i(6 - 2i) &= 5i(6) + 5i(-2i) && \text{Propiedad distributiva.} \\ &= 30i - 10i^2 \\ &= 30i - 10(-1) && \text{Reemplazar } i^2 \text{ con } -1. \\ &= 30i + 10 \quad \text{o} \quad 10 + 30i\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\sqrt{-9}(\sqrt{-3} + 8) &= 3i(i\sqrt{3} + 8) && \text{Cambiar los números imaginarios a la forma } bi. \\ &= 3i(i\sqrt{3}) + 3i(8) && \text{Propiedad distributiva} \\ &= 3i^2\sqrt{3} + 24i \\ &= 3(-1)\sqrt{3} + 24i && \text{Reemplazar } i^2 \text{ con } -1. \\ &= -3\sqrt{3} + 24i\end{aligned}$$

c) $(2 - \sqrt{-18})(\sqrt{-2} + 5) = (2 - \sqrt{-1}\sqrt{18})(\sqrt{-1}\sqrt{2} + 5)$
$= (2 - \sqrt{-1}\sqrt{9}\sqrt{2})(\sqrt{-1}\sqrt{2} + 5)$
$= (2 - 3i\sqrt{2})(i\sqrt{2} + 5)$

Ahora utilice el método PIES para multiplicar.

$$\begin{aligned}(2 - 3i\sqrt{2})(i\sqrt{2} + 5) &= (2)(i\sqrt{2}) + (2)(5) + (-3i\sqrt{2})(i\sqrt{2}) + (-3i\sqrt{2})(5)\\ &= 2i\sqrt{2} - 3i^2(2) + 10 - 15i\sqrt{2}\\ &= 2i\sqrt{2} - 3(-1)(2) + 10 - 15i\sqrt{2}\\ &= 2i\sqrt{2} + 6 + 10 - 15i\sqrt{2}\\ &= 16 - 13i\sqrt{2}\end{aligned}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 45

Cómo evitar errores comunes

¿Qué es $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-2}$?

CORRECTO	INCORRECTO
$\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-2} = 2i \cdot i\sqrt{2}$	~~$\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{8}$~~
$= 2i^2\sqrt{2}$	~~$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$~~
$= 2(-1)\sqrt{2}$	~~$= 2\sqrt{2}$~~
$= -2\sqrt{2}$	

Recuerde que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ sólo para a y b números reales *no negativos*.

4 Dividir números complejos

El **conjugado de un número complejo**, $a + bi$ es $a - bi$. Por ejemplo,

Número complejo	Conjugado
$3 + 7i$	$3 - 7i$
$1 - i\sqrt{3}$	$1 + i\sqrt{3}$
$2i$ (o $0 + 2i$)	$-2i$ (o $0 - 2i$)

Al multiplicar un número complejo por su conjugado mediante el método PIES, los productos interno y externo sumarán cero y el resultado será un número real. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(5 + 3i)(5 - 3i) &= 25 + 15i - 15i - 9i^2\\ &= 25 - 9i^2\\ &= 25 - 9(-1)\\ &= 25 + 9 = 34\end{aligned}$$

Ahora veamos cómo dividir números complejos.

Para dividir números complejos

1. Cambie todos los números imaginarios a la forma bi.
2. Racionalice el denominador, multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.
3. Escriba la respuesta en la forma $a + bi$.

EJEMPLO 5 Divida $\frac{9+i}{i}$.

Solución Comience multiplicando el numerador y el denominador por $-i$, el conjugado de i.

$$\frac{9+i}{i}\cdot\frac{-i}{-i}=\frac{(9+i)(-i)}{-i^2}$$

$$=\frac{-9i-i^2}{-i^2} \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$=\frac{-9i-(-1)}{-(-1)} \quad \text{Reemplace } i^2 \text{ con } -1.$$

$$=\frac{-9i+1}{1}$$

$$=1-9i$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 59

EJEMPLO 6 Divida $\frac{3+2i}{4-i}$.

Solución Multiplique el numerador y el denominador por $4+i$, el conjugado de $4-i$.

$$\frac{3+2i}{4-i}\cdot\frac{4+i}{4+i}=\frac{12+3i+8i+2i^2}{16-i^2}$$

$$=\frac{12+11i+2(-1)}{16-(-1)}$$

$$=\frac{10+11i}{17} \quad \text{o} \quad \frac{10}{17}+\frac{11}{17}i$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 65

EJEMPLO 7 **Impedancia** Un concepto necesario en el estudio de la electrónica es la *impedancia*. La impedancia afecta la corriente en un circuito; siendo Z, en un circuito se determina mediante la fórmula $Z=\frac{V}{I}$, donde V es el voltaje e I es la corriente. Determine Z cuando $V=1.6-0.3i$ e $I=-0.2i$, donde $i=\sqrt{-1}$.

Solución $Z=\frac{V}{I}=\frac{1.6-0.3i}{-0.2i}$. Ahora multiplicamos el numerador y el denominador por $0.2i$.

$$Z=\frac{1.6-0.3i}{-0.2i}\cdot\frac{0.2i}{0.2i}=\frac{0.32i-0.06i^2}{-0.04i^2}$$

$$=\frac{0.32i+0.06}{0.04}$$

$$=\frac{0.32i}{0.04}+\frac{0.06}{0.04}$$

$$=8i+1.5 \quad \text{o} \quad 1.5+8i$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 127

Casi todos los libros de álgebra utilizan i como unidad imaginaria; sin embargo, muchos libros de electrónica utilizan como equivalente la letra j, ya que, en ese contexto, i suele representar la corriente.

5 Determinar potencias de i

Por medio de $i = \sqrt{-1}$ y de $i^2 = -1$, podemos determinar otras **potencias de i**. Por ejemplo,

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \qquad i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1(-1) = -1$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1 \qquad i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1(-i) = -i$$
$$i^5 = i^4 \cdot i^1 = 1 \cdot i = i \qquad i^8 = i^4 \cdot i^4 = (1)(1) = 1$$

Observe que las potencias sucesivas de i rotan por los cuatro valores, i, -1, $-i$, (vea la **figura 7.8**).

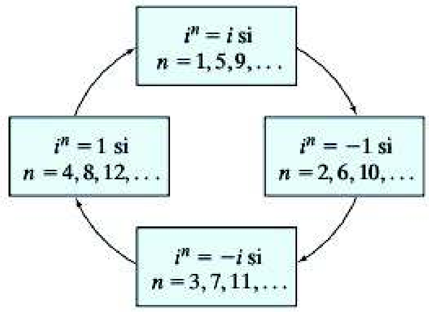


FIGURA 7.8

EJEMPLO 8 ▸ Evalúe. **a)** i^{35} **b)** i^{101}

Solución Escribimos cada expresión como un producto de factores tales que el exponente de un factor sea el máximo múltiplo de 4 menor o igual que el exponente dado. Después escribimos este factor como i^4 elevado a alguna potencia. Como i^4 tiene un valor de 1, la expresión i^4 elevada a una potencia también tendrá un valor de 1.

a) $i^{35} = i^{32} \cdot i^3 = (i^4)^8 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = 1(-i) = -i$

b) $i^{101} = i^{100} \cdot i^1 = (i^4)^{25} \cdot i = 1 \cdot i = i$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 101

Sugerencia útil

Una forma rápida para evaluar i^n consiste en dividir el exponente entre 4 y analizar el residuo.

Si el residuo es 0, el valor es 1. Si el residuo es 2, el valor es -1.
Si el residuo es 1, el valor es i. Si el residuo es 3, el valor es $-i$.

Para el ejemplo 8 **a)**

$$\begin{array}{r} 8 \\ 4\overline{)35} \\ \underline{32} \\ 3 \end{array}$$

La respuesta es $-i$.

$i^{35} = (i^4)^8 \cdot i^3 = (1)^8 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = i^3 = -i$

Para el ejemplo 8 **b)**

$$\begin{array}{r} 25 \\ 4\overline{)101} \\ \underline{8} \\ 21 \\ \underline{20} \\ 1 \end{array}$$

← La respuesta es i.

EJEMPLO 9 ▸ Sea $f(x) = x^2$. Determine: **a)** $f(6i)$ **b)** $f(3 + 7i)$.

Solución

a) $f(x) = x^2$

$f(6i) = (6i)^2 = 36i^2 = 36(-1) = -36$

b) $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f(3 + 7i) = (3 + 7i)^2 &= (3)^2 + 2(3)(7i) + (7i)^2 \\ &= 9 + 42i + 49i^2 \\ &= 9 + 42i + 49(-1) \\ &= 9 + 42i - 49 \\ &= -40 + 42i \end{aligned}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 117

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.7

MathXL® MyMathLab

1. a) ¿A qué es igual i?
   b) ¿A qué es igual i^2?
2. Escriba $\sqrt{-n}$ mediante i.
3. ¿Todos los siguientes son números complejos? Si algunos no lo son, explique por qué.
   a) 9 b) $-\frac{1}{2}$ c) $4 - \sqrt{-2}$
   d) $7 - 3i$ e) $4.2i$ f) $11 + \sqrt{3}$
4. ¿A qué es igual i^4?
5. ¿Todos los números reales y todos los números imaginarios son números complejos?
6. ¿Todos los números complejos son números reales?
7. ¿Cuál es el conjugado de $a + bi$?
8. a) ¿Es $i \cdot i$ un número real? Explique.
   b) ¿Es $i \cdot i \cdot i$ un número real? Explique.
9. Liste, si es posible, un número que *no* sea
   a) un número racional.
   b) un número irracional.
   c) un número real.
   d) un número imaginario.
   e) un número complejo.
10. Escriba un párrafo o dos explicando la relación entre los números reales, los números imaginarios y los números complejos. Incluya cómo se relacionan entre sí los distintos conjuntos de números.

Práctica de habilidades

Escriba cada expresión como un número complejo en la forma $a + bi$.

11. 7
12. $3i$
13. $\sqrt{25}$
14. $\sqrt{-100}$
15. $21 - \sqrt{-36}$
16. $\sqrt{3} + \sqrt{-3}$
17. $\sqrt{-24}$
18. $\sqrt{49} - \sqrt{-49}$
19. $8 - \sqrt{-12}$
20. $\sqrt{-9} + \sqrt{-81}$
21. $3 + \sqrt{-98}$
22. $\sqrt{-9} + 7i$
23. $12 - \sqrt{-25}$
24. $10 + \sqrt{-32}$
25. $7i - \sqrt{-45}$
26. $\sqrt{144} + \sqrt{-96}$

Sume o reste.

27. $(19 - i) + (2 + 9i)$
28. $(22 + i) - 5(11 - 3i) + 4$
29. $(8 - 3i) + (-8 + 3i)$
30. $(7 - \sqrt{-4}) - (-1 - \sqrt{-16})$
31. $(1 + \sqrt{-1}) + (-18 - \sqrt{-169})$
32. $(16 - i\sqrt{3}) + (17 - \sqrt{-3})$
33. $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (3\sqrt{2} - \sqrt{-8})$
34. $(8 - \sqrt{2}) - (5 + \sqrt{-15})$
35. $(5 - \sqrt{-72}) + (6 + \sqrt{-8})$
36. $(29 + \sqrt{-75}) + (\sqrt{-147})$
37. $(\sqrt{4} - \sqrt{-45}) + (-\sqrt{25} + \sqrt{-5})$
38. $(\sqrt{20} - \sqrt{-12}) + (2\sqrt{5} + \sqrt{-75})$

Multiplique.

39. $2(3 - i)$
40. $-7(5 + 3i\sqrt{5})$
41. $i(4 + 9i)$
42. $3i(6 - i)$
43. $\sqrt{-9}(6 + 11i)$
44. $\frac{1}{2}i\left(\frac{1}{3} - 18i\right)$
45. $\sqrt{-16}(\sqrt{3} - 7i)$
46. $-\sqrt{-24}(\sqrt{6} - \sqrt{-3})$
47. $\sqrt{-27}(\sqrt{3} - \sqrt{-3})$
48. $\sqrt{-32}(\sqrt{2} + \sqrt{-8})$
49. $(3 + 2i)(1 + i)$
50. $(6 - 2i)(3 + i)$
51. $(10 - 3i)(10 + 3i)$
52. $(-4 + 3i)(2 - 5i)$
53. $(7 + \sqrt{-2})(5 - \sqrt{-8})$
54. $(\sqrt{4} - 3i)(4 + \sqrt{-4})$
55. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}i\right)$
56. $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}i\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}i\right)$

Divida.

57. $\frac{8}{3i}$
58. $\frac{5}{4i}$
59. $\frac{2 + 3i}{2i}$
60. $\frac{7 - 3i}{2i}$
61. $\frac{6}{2 - i}$
62. $\frac{9}{5 + i}$
63. $\frac{3}{1 - 2i}$
64. $\frac{13}{-3 - 4i}$
65. $\frac{6 - 3i}{4 + 2i}$
66. $\frac{4 - 3i}{4 + 3i}$
67. $\frac{4}{6 - \sqrt{-4}}$
68. $\frac{2}{3 + \sqrt{-5}}$
69. $\frac{\sqrt{2}}{5 + \sqrt{-12}}$
70. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{-9}}$
71. $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{-3}}{5 - \sqrt{-20}}$
72. $\frac{12 - \sqrt{-12}}{\sqrt{3} + \sqrt{-5}}$
73. $\frac{\sqrt{-75}}{\sqrt{-3}}$
74. $\frac{\sqrt{-30}}{\sqrt{-2}}$
75. $\frac{\sqrt{-32}}{\sqrt{-18}\sqrt{8}}$
76. $\frac{\sqrt{-40}\sqrt{-20}}{\sqrt{-4}}$

Realice las operaciones indicadas. Estos ejercicios son una combinación de los que se presentaron antes en esta sección.

77. $(9 - 2i) + (3 - 5i)$

78. $\left(\frac{1}{2} + 2i\right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{3}i\right)$

79. $(\sqrt{50} - \sqrt{2}) - (\sqrt{-12} - \sqrt{-48})$

80. $(8 - \sqrt{-6}) - (2 - \sqrt{-24})$

81. $5.2(4 - 3.2i)$

82. $\sqrt{-6}(\sqrt{3} - \sqrt{-10})$

83. $(9 + 2i)(3 - 5i)$

84. $(\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{6} - \sqrt{-8})$

85. $\frac{11 + 4i}{2i}$

86. $\frac{1}{4 + 3i}$

87. $\frac{6}{\sqrt{3} - \sqrt{-4}}$

88. $\frac{5 - 2i}{3 + 2i}$

89. $\left(11 - \frac{5}{9}i\right) - \left(4 - \frac{3}{5}i\right)$

90. $\frac{8}{7}\left(4 - \frac{2}{5}i\right)$

91. $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}i\right)\left(\frac{3}{5} - \frac{3}{4}i\right)$

92. $\sqrt{\frac{4}{9}}\left(\sqrt{\frac{25}{36}} - \sqrt{-\frac{4}{25}}\right)$

93. $\frac{\sqrt{-48}}{\sqrt{-12}}$

94. $\frac{-6 - 2i}{2 + \sqrt{-5}}$

95. $(5.23 - 6.41i) - (9.56 + 4.5i)$

96. $(\sqrt{-6} + 3)(\sqrt{-15} + 5)$

Indique si el valor de cada número imaginario es -1, $-i$ o 1.

97. i^6 **98.** i^{63} **99.** i^{160} **100.** i^{231}

101. i^{93} **102.** i^{103} **103.** i^{811} **104.** i^{1213}

Resolución de problemas

105. Considere el número complejo $2 + 3i$.

a) Determine su inverso aditivo.

b) Determine su inverso multiplicativo. Escriba la respuesta en forma simplificada.

106. Considere el número complejo $4 - 5i$.

a) Determine su inverso aditivo.

b) Determine su inverso multiplicativo. Escriba la respuesta en forma simplificada.

En los ejercicios 107 a 110, responda verdadero o falso. Apoye su respuesta con un ejemplo.

107. El producto de dos números imaginarios puros siempre es un número real.

108. La suma de dos números imaginarios puros siempre es un número imaginario puro.

109. El producto de dos números complejos siempre es un número real.

110. La suma de dos números complejos siempre es un número complejo.

111. ¿Qué valores de n hacen que i^n sea un número real? Explique.

112. ¿Qué valores de n hacen que i^{2n} sea un número real? Explique.

113. Si $f(x) = x^2$, determine $f(2i)$.

114. Si $f(x) = x^2$, determine $f(4i)$.

115. Si $f(x) = x^4 - 2x$, determine $f(2i)$.

116. Si $f(x) = x^3 - 4x^2$, determine $f(5i)$.

117. Si $f(x) = x^2 + 2x$, determine $f(3 + i)$.

118. Si $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$, determine $f(4 - i)$.

Evalúe cada expresión para el valor dado de x.

119. $x^2 - 2x + 5, x = 1 + 2i$

120. $x^2 - 2x + 5, x = 1 - 2i$

121. $x^2 + 2x + 7, x = -1 + i\sqrt{5}$

122. $x^2 + 2x + 9, x = -1 - i\sqrt{5}$

En los ejercicios 123 a 126, determine si el valor dado de x es solución de la ecuación.

123. $x^2 - 4x + 5 = 0, x = 2 - i$

124. $x^2 - 4x + 5 = 0, x = 2 + i$

125. $x^2 - 6x + 11 = 0, x = -3 + i\sqrt{3}$

126. $x^2 - 6x + 15 = 0, x = 3 - i\sqrt{3}$

127. **Impedancia** Determine la impedancia, Z, mediante la fórmula $Z = \frac{V}{I}$ cuando $V = 1.8 + 0.5i$ e $I = 0.6i$. Vea el ejemplo 7.

128. **Impedancia** Consulte el ejercicio 127. Determine la impedancia cuando $V = 2.4 - 0.6i$ e $I = -0.4i$.

129. **Impedancia** En determinadas condiciones, la impedancia total, Z_T, de un circuito se determina mediante la fórmula

$$Z_T = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Determine Z_T cuando $Z_1 = 2 - i$ y $Z_2 = 4 + i$

130. **Impedancia** Consulte el ejercicio 129. Determine Z_T, cuando $Z_1 = 3 - i$ y $Z_2 = 5 + i$.

131. Determine si i^{-1} es igual a $i, -1, -i$ o 1.

132. Determine si i^{-5} es igual a $i, -1, -i$ o 1.

En el capítulo 8 utilizaremos la fórmula cuadrática $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *para resolver ecuaciones con la forma* $ax^2 + bx + c = 0$.

(a) *Utilice la fórmula cuadrática para resolver las ecuaciones cuadráticas siguientes.* ***(b)*** *Compruebe cada una de las soluciones sustituyendo los valores encontrados para x (uno a la vez) en la ecuación original. En estos ejercicios, el símbolo ± (se lee "más menos") da como resultado dos respuestas complejas distintas.*

133. $x^2 - 2x + 6 = 0$

134. $x^2 - 4x + 6 = 0$

Dados los números complejos $a = 5 + 2i\sqrt{3}$, $b = 1 + i\sqrt{3}$, *evalúe cada expresión.*

135. $a + b$

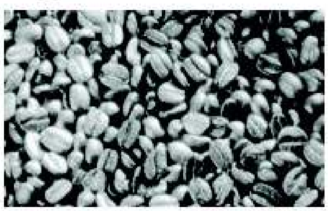
136. $a - b$

137. ab

138. $\dfrac{a}{b}$

Ejercicios de repaso acumulativo

[4.3] **139.** **Mezcla** Berreda Coughlin, un abarrotero, tiene dos tipos de café en su almacén; uno lo vende a $5.50 por libra y el otro en $6.30. ¿Cuántas libras de cada tipo debe mezclar para producir 40 libras de café para vender a $6.00 por libra?

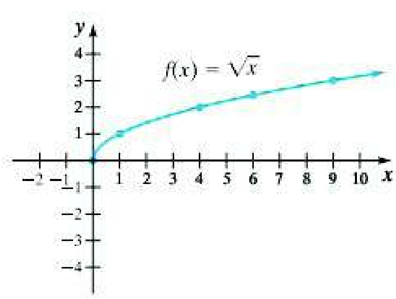


[5.3] **140.** Divida $\dfrac{8c^2 + 6c - 35}{4c + 9}$.

[6.2] **141.** Sume $\dfrac{b}{a - b} + \dfrac{a + b}{b}$.

[6.4] **142.** Resuelva $\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{x - 1}{2}$.

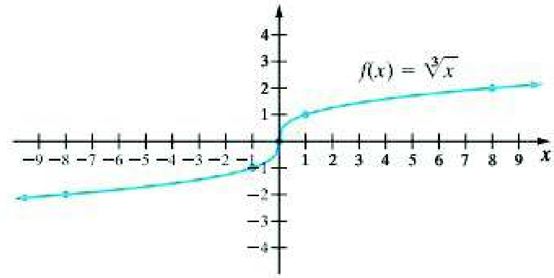
Resumen del capítulo 7

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 7.1	
Una **expresión radical** tiene la forma $\sqrt[n]{x}$, donde n es el índice y x es el radicando.	En la expresión radical $\sqrt[3]{x}$, 3 es el índice y x es el radicando.
La **raíz cuadrada principal** de un número positivo a, escrita $\sqrt{a}$, es el número positivo b tal que $b^2 = a$.	$\sqrt{81} = 9$, ya que $9^2 = 81$ $\sqrt{0.36} = 0.6$ ya que $(0.6)^2 = 0.36$
La **función raíz cuadrada** es $f(x) = \sqrt{x}$. Su dominio es $[0, \infty)$ y su rango es $[0, \infty)$.	
La **raíz cúbica** de un número a, escrita $\sqrt[3]{a}$, es el número b tal que $b^3 = a$.	$\sqrt[3]{27} = 3$ ya que $3^3 = 27$ $\sqrt[3]{-125} = -5$ ya que $(-5)^3 = -125$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 7.1 (continuación)

La **función raíz cúbica** es $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Su dominio es $(-\infty, \infty)$ o $\mathbb{R}$ y su rango es $(-\infty, \infty)$ o $\mathbb{R}$.



La raíz n-ésima de a, $\sqrt[n]{a}$, donde n es un **índice par** y a es un número real no negativo, es el número no negativo b tal que $b^n = a$.

$\sqrt{4} = 2$ ya que $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$
$\sqrt[4]{81} = 3$ ya que $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

La raíz n-ésima de a, $\sqrt[n]{a}$, donde n es un **índice impar** y a es cualquier número real, es el número real b tal que $b^n = a$.

$\sqrt[3]{27} = 3$ ya que $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
$\sqrt[5]{-32} = -2$ ya que $(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$

Para cualquier número real a, $\sqrt{a^2} = |a|$.

$\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$
$\sqrt{(y+8)^2} = |y+8|$

Sección 7.2

Exponente racional

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Cuando a es no negativo, n puede ser cualquier índice.
Cuando a es negativo, n debe ser impar.

$\sqrt{17} = 17^{1/2}$
$\sqrt[4]{21x^3y^2} = (21x^3y^2)^{1/4}$

Para cualquier número no negativo a, y enteros m y n.

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{m/n}$$

(Potencia: m; Índice: n)

$\sqrt[4]{z^9} = (\sqrt[4]{z})^9 = z^{9/4}$

Para cualquier número real no negativo a.

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a^{n/n} = a$$

$\sqrt[4]{y^4} = y, \quad \sqrt[8]{14^8} = 14$

Reglas de los exponentes

Para todos los números reales a y b y todos los números racionales m y n,

Regla		Ejemplo
Regla del producto	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$x^{1/3} \cdot x^{4/3} = x^{(1/3)+(4/3)} = x^{5/3}$
Regla del cociente	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$	$\dfrac{x^{4/5}}{x^{1/2}} = x^{(4/5)-(1/2)} = x^{(8/10)-(5/10)} = x^{3/10}$
Regla del exponente no negativo	$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}, \quad a \neq 0$	$x^{-1/7} = \dfrac{1}{x^{1/7}}$
Regla del exponente cero	$a^0 = 1, \quad a \neq 0$	$m^0 = 1$
Elevar una potencia a una potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(c^{1/8})^{16} = c^{(1/8) \cdot 16} = c^2$
Elevar un producto a una potencia	$(ab)^m = a^m b^m$	$(p^3q^4)^{1/8} = p^{3/8}q^{1/2}$
Elevar un cociente a una potencia	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}, \quad b \neq 0$	
	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n = \dfrac{b^n}{a^n}, \quad a \neq 0, b \neq 0$	$\left(\dfrac{81}{49}\right)^{-1/2} = \left(\dfrac{49}{81}\right)^{1/2} = \dfrac{49^{1/2}}{81^{1/2}} = \dfrac{7}{9}$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 7.3	
Un número o expresión es un **cuadrado perfecto** si es el cuadrado de una expresión. Un número o expresión es un **cubo perfecto** si es el cubo de una expresión.	Cuadrados perfectos: $49 \quad 81 \quad x^{12} \quad y^{50}$ Cuadrado de un número o expresión: $7^2 \quad 9^2 \quad (x^6)^2 \quad (y^{25})^2$ Cubos perfectos: $27 \quad -27 \quad y^{18} \quad z^{30}$ Cubo de un número o expresión: $3^3 \quad (-3)^3 \quad (y^6)^3 \quad (z^{10})^3$
Regla del producto para radicales Para números reales no negativos a y b, $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4, \quad \sqrt[3]{2x^3} = \sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{2} = x\sqrt[3]{2}$
Para simplificar radicales mediante la regla del producto **1.** Si el radicando tiene un coeficiente diferente de 1, escríbalo como un producto de dos números, uno de los cuales sea la mayor potencia perfecta para el índice. **2.** Escriba cada factor variable como un producto de dos factores, uno de los cuales sea la mayor potencia perfecta para el índice. **3.** Utilice la regla del producto para escribir la expresión radical como un producto de radicales. Coloque todas las potencias perfectas (números y variables) bajo el mismo radical. **4.** Simplifique el radical que tiene las potencias perfectas.	$\sqrt{24} = \sqrt{4\cdot 6} = \sqrt{4}\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ $\sqrt[3]{16x^5y^9} = \sqrt[3]{8x^3y^9\cdot 2x^2}$ $= \sqrt[3]{8x^3y^9}\sqrt[3]{2x^2}$ $= 2xy^3\sqrt[3]{2x^2}$
Regla del cociente para radicales Para números reales no negativos a y b, $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, \quad b \neq 0$	$\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4, \quad \sqrt[3]{\dfrac{x^6}{y^{12}}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{y^{12}}} = \dfrac{x^2}{y^4}$
Sección 7.4	
Radicales semejantes son radicales con el mismo radicando y el mismo índice. **Radicales diferentes** son radicales con un radicando o el índice diferente.	Radicales semejantes: $\sqrt{3}, \; 12\sqrt{3}$; $2\sqrt[4]{xy^3}, \; -3\sqrt[4]{xy^3}$ Radicales no semejantes: $\sqrt{3}, \; 7\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[5]{xy^3}, \; x\sqrt[5]{y^3}$
Para sumar o restar radicales **1.** Simplifique cada expresión radical. **2.** Combine los radicales semejantes (si los hay).	$\sqrt{27} + \sqrt{48} - 2\sqrt{75} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{3} + \sqrt{16}\cdot\sqrt{3} - 2\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{3}$ $= 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3}$ $= -3\sqrt{3}$
Para multiplicar radicales Utilice la regla del producto $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt[4]{8c^2}\sqrt[4]{4c^3} = \sqrt[4]{32c^5} = \sqrt[4]{16c^4}\sqrt[4]{2c}$ $= 2c\sqrt[4]{2c}$
Sección 7.5	
Para **racionalizar un denominador** multiplique el numerador y el denominador de la fracción por el radical que dé como resultado que el radicando en el denominador sea una potencia perfecta.	$\dfrac{6}{\sqrt{3x}}\cdot\dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}} = \dfrac{6\sqrt{3x}}{\sqrt{9x^2}} = \dfrac{6\sqrt{3x}}{3x} = \dfrac{2\sqrt{3x}}{x}$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 7.5 (continuación)	
Una expresión radical está simplificada cuando se cumple todo lo siguiente **1.** No hay potencias perfectas que sean factores del radicando y todos los exponentes en el radicando son menores que el índice. **2.** Ningún radicando tiene fracciones. **3.** Ningún denominador tiene radicales.	No está simplificada — Simplificada **1.** $\sqrt{x^3}$ — $x\sqrt{x}$ **2.** $\sqrt{\frac{1}{2}}$ — $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **3.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ — $\frac{\sqrt{2}}{2}$
Sección 7.6	
Para resolver ecuaciones radicales **1.** Reescriba la ecuación de modo que un radical con una variable quede solo (aislado) en un lado de la ecuación. **2.** Eleve cada lado de la ecuación a una potencia igual al índice del radical. **3.** Reduzca los términos semejantes. **4.** Si la ecuación aún tiene un término con una variable en un radicando, repita los pasos 1 a 3. **5.** Despeje la variable de la ecuación resultante. **6.** Compruebe todas las soluciones en la ecuación original, para detectar raíces extrañas (si las hay).	Resuelva $\sqrt{x} - 8 = 0$. $\sqrt{x} - 8 = 0$ $\sqrt{x} = 8$ $(\sqrt{x})^2 = 8^2$ $x = 64$ Una verificación muestra que 64 es la solución.
Sección 7.7	
La **unidad imaginaria**, i, se define como $i = \sqrt{-1}$. (También, $i^2 = -1$.)	$\sqrt{-25} = \sqrt{25}\,\sqrt{-1} = 5i$
Número imaginario Para cualquier número positivo n, $\sqrt{-n} = i\sqrt{n}$.	$\sqrt{-19} = i\sqrt{19}$
Un **número complejo** es un número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.	$3 + 2i$ y $26 - 15i$ son números complejos.
Para sumar o restar números complejos **1.** Cambie todos los números imaginarios a la forma bi. **2.** Sume (o reste) las partes reales de los números complejos. **3.** Sume (o reste) las partes imaginarias de los números complejos. **4.** Escriba la respuesta en la forma $a + bi$.	Sume $(8 - 3i) + (12 + 5i)$. $(8 - 3i) + (12 + 5i)$ $= 8 + 12 - 3i + 5i$ $= 20 + 2i$
Para multiplicar números complejos **1.** Cambie todos los números imaginarios a la forma bi. **2.** Multiplique los números complejos como multiplicaría polinomios. **3.** Sustituya i^2 por -1. **4.** Reduzca las partes reales y las partes imaginarias. Escriba la respuesta en la forma $a + bi$.	Multiplique $(7 + 2i\sqrt{3})(5 - 4i\sqrt{3})$. $(7 + 2i\sqrt{3})(5 - 4i\sqrt{3})$ $= 35 - 28i\sqrt{3} + 10i\sqrt{3} - 8(i^2)(3)$ $= 35 - 28i\sqrt{3} + 10i\sqrt{3} + 24$ $= 59 - 18i\sqrt{3}$
El **conjugado de un número complejo** $a + bi$ es $a - bi$.	Número complejo — Conjugado $14 + 2i$ — $14 - 2i$ $17 - 8i$ — $17 + 8i$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 7.7 (continuación)	
Para dividir números complejos 1. Cambie todos los números imaginarios a la forma bi. 2. Racionalice el denominador, multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. 3. Escriba la respuesta en la forma $a + bi$.	Divida $\frac{2-i}{5+3i}$. $\frac{2-i}{5+3i}\cdot\frac{5-3i}{5-3i} = \frac{10-6i-5i+3i^2}{25-9i^2} = \frac{7-11i}{34}$
Potencias de i $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i$	$i^{38} = i^{36}\cdot i^2 = (i^4)^9\cdot i^2 = 1^9\cdot(-1) = -1$ $i^{63} = i^{60}\cdot i^3 = (i^4)^{15}\cdot i^3 = 1^{15}(-i) = -i$

Ejercicios de repaso del capítulo 7

[7.1] *Evalúe*

1. $\sqrt{100}$
2. $\sqrt[3]{-27}$
3. $\sqrt[3]{-125}$
4. $\sqrt[4]{256}$

Utilice el valor absoluto para evaluar.

5. $\sqrt{(-8)^2}$
6. $\sqrt{(38.2)^2}$

Escriba como un valor absoluto.

7. $\sqrt{x^2}$
8. $\sqrt{(x-3)^2}$
9. $\sqrt{(x-y)^2}$
10. $\sqrt{(x^2-4x+12)^2}$
11. Sea $f(x) = \sqrt{10x+9}$. Determine $f(4)$.
12. Sea $k(x) = 2x + \sqrt{\frac{x}{3}}$. Determine $k(27)$.
13. Sea $g(x) = \sqrt[3]{2x+3}$. Determine $g(4)$ y redondee la respuesta al décimo más cercano
14. **Área** El área de un cuadrado mide 144 metros cuadrados. Determine la longitud de cada uno de sus lados.

Para el resto de estos ejercicios de repaso, suponga que todas las variables representan números reales positivos.

[7.2] *Escriba en forma exponencial.*

15. $\sqrt{x^7}$
16. $\sqrt[3]{x^5}$
17. $(\sqrt[4]{y})^{13}$
18. $\sqrt[7]{6^{-2}}$

Escriba en forma radical.

19. $x^{1/2}$
20. $a^{4/5}$
21. $(8m^2n)^{7/4}$
22. $(x+y)^{-5/3}$

Simplifique cada expresión radical cambiándola a forma exponencial. Escriba la respuesta en forma radical cuando sea apropiado.

23. $\sqrt[3]{4^6}$
24. $\sqrt{x^{12}}$
25. $(\sqrt[4]{9})^8$
26. $\sqrt[20]{a^5}$

Evalúe, si es posible. Si la expresión no es un número real, indíquelo.

27. $-36^{1/2}$
28. $(-36)^{1/2}$
29. $\left(\frac{64}{27}\right)^{-1/3}$
30. $64^{-1/2} + 8^{-2/3}$

Simplifique. Escriba la respuesta sin exponentes negativos.

31. $x^{3/5}\cdot x^{-1/3}$
32. $\left(\frac{64}{y^9}\right)^{1/3}$
33. $\left(\frac{a^{-6/5}}{a^{2/5}}\right)^{2/3}$
34. $\left(\frac{20x^5y^{-3}}{4y^{1/2}}\right)^2$

Multiplique.

35. $a^{1/2}(5a^{3/2} - 3a^2)$
36. $4x^{-2/3}\left(x^{-1/2} + \frac{11}{4}x^{2/3}\right)$

Factorice cada expresión. Escriba la respuesta sin exponentes negativos.

37. $x^{2/5} + x^{7/5}$
38. $a^{-1/2} + a^{3/2}$

Determine el valor indicado en cada función. Utilice su calculadora para evaluar los números irracionales. Redondee los números irracionales al milésimo más cercano.

39. Si $f(x) = \sqrt{6x-11}$, determine $f(6)$.
40. Si $g(x) = \sqrt[3]{9x-17}$, determine $g(4)$.

Grafique las funciones siguientes.

41. $f(x) = \sqrt{x}$

42. $f(x) = \sqrt{x} - 4$

[7.2–7.5] *Simplifique.*

43. $\sqrt{48}$

44. $\sqrt[3]{128}$

45. $\sqrt{\frac{49}{9}}$

46. $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$

47. $-\sqrt{\frac{81}{49}}$

48. $\sqrt[3]{-\frac{27}{125}}$

49. $\sqrt{32}\,\sqrt{2}$

50. $\sqrt[3]{32}\,\sqrt[3]{2}$

51. $\sqrt{18x^2y^3z^4}$

52. $\sqrt{75x^3y^7}$

53. $\sqrt[3]{54a^7b^{10}}$

54. $\sqrt[3]{125x^8y^9z^{16}}$

55. $\left(\sqrt[6]{x^2y^3z^5}\right)^{42}$

56. $\left(\sqrt[5]{2ab^4c^6}\right)^{15}$

57. $\sqrt{5x}\,\sqrt{8x^5}$

58. $\sqrt[3]{2x^2y}\,\sqrt[3]{4x^9y^4}$

59. $\sqrt[3]{2x^4y^5}\,\sqrt[3]{16x^4y^4}$

60. $\sqrt[4]{4x^4y^7}\,\sqrt[4]{4x^5y^9}$

61. $\sqrt{3x}\left(\sqrt{12x} - \sqrt{20}\right)$

62. $\sqrt[3]{2x^2y}\left(\sqrt[3]{4x^4y^7} + \sqrt[3]{9x}\right)$

63. $\sqrt{\sqrt{a^3b^2}}$

64. $\sqrt{\sqrt[3]{x^5y^2}}$

65. $\left(\frac{4r^2p^{1/3}}{r^{1/2}p^{4/3}}\right)^3$

66. $\left(\frac{6y^{2/5}z^{1/3}}{x^{-1}y^{3/5}}\right)^{-1}$

67. $\sqrt{\frac{3}{5}}$

68. $\sqrt[3]{\frac{7}{9}}$

69. $\sqrt[4]{\frac{5}{4}}$

70. $\frac{x}{\sqrt{10}}$

71. $\frac{8}{\sqrt{x}}$

72. $\frac{m}{\sqrt[3]{25}}$

73. $\frac{10}{\sqrt[3]{y^2}}$

74. $\frac{9}{\sqrt[4]{z}}$

75. $\sqrt[3]{\frac{x^3}{27}}$

76. $\frac{\sqrt[3]{2x^{10}}}{\sqrt[3]{16x^7}}$

77. $\sqrt{\frac{32x^2y^5}{2x^8y}}$

78. $\sqrt[4]{\frac{48x^9y^{15}}{3xy^3}}$

79. $\sqrt{\frac{6x^4}{y}}$

80. $\sqrt{\frac{12a}{7b}}$

81. $\sqrt{\frac{18x^4y^5}{3z}}$

82. $\sqrt{\frac{125x^2y^5}{3z}}$

83. $\sqrt[3]{\frac{108x^3y^7}{2y^3}}$

84. $\sqrt[3]{\frac{3x}{5y}}$

85. $\sqrt[3]{\frac{9x^5y^3}{x^6}}$

86. $\sqrt[3]{\frac{y^6}{5x^2}}$

87. $\sqrt[4]{\frac{2a^2b^{11}}{a^5b}}$

88. $\sqrt[4]{\frac{3x^2y^6}{8x^3}}$

89. $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$

90. $(\sqrt{x} + y)(\sqrt{x} - y)$

91. $(x - \sqrt{y})(x + \sqrt{y})$

92. $(\sqrt{3} + 2)^2$

93. $(\sqrt{x} - \sqrt{3y})(\sqrt{x} + \sqrt{5y})$

94. $(\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{3y})(\sqrt[3]{3x} - \sqrt[3]{2y})$

95. $\frac{6}{2 + \sqrt{5}}$

96. $\frac{x}{4 + \sqrt{x}}$

97. $\frac{a}{4 - \sqrt{b}}$

98. $\frac{x}{\sqrt{y} - 7}$

99. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

100. $\frac{\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

101. $\frac{2}{\sqrt{a - 1} - 2}$

102. $\frac{5}{\sqrt{y + 2} - 3}$

103. $\sqrt[3]{x} + 10\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x}$

104. $\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{192}$

105. $\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{64}$

106. $\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{32}} + \sqrt{50}$

107. $9\sqrt{x^5y^6} - \sqrt{16x^7y^8}$

108. $8\sqrt[3]{x^7y^8} - \sqrt[3]{x^4y^2} + 3\sqrt[3]{x^{10}y^2}$

En los ejercicios 109 y 110, f(x) y g(x) están dadas. Determine $(f \cdot g)(x)$.

109. $f(x) = \sqrt{3x}$, $g(x) = \sqrt{6x} - \sqrt{15}$

110. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2}$, $g(x) = \sqrt[3]{4x^4} + \sqrt[3]{16x^5}$

Simplifique. En el ejercicio 112, suponga que la variable puede ser cualquier número real.

111. $f(x) = \sqrt{2x + 7}\,\sqrt{2x + 7},\ x \geq -\frac{7}{2}$

112. $g(a) = \sqrt{20a^2 + 100a + 125}$

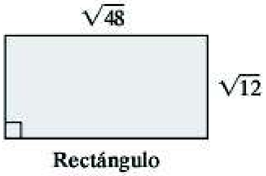
Simplifique.

113. $\frac{\sqrt[3]{(x + 5)^5}}{\sqrt{(x + 5)^3}}$

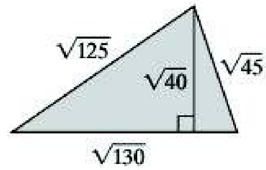
114. $\frac{\sqrt[3]{a^3b^2}}{\sqrt[4]{a^4b}}$

Perímetro y área *Para cada figura, determine* **a)** *el perímetro, y* **b)** *el área. Escriba sus respuestas en forma radical, con los radicales simplificados.*

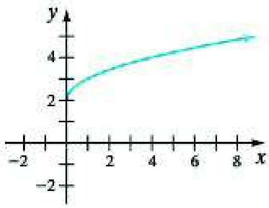
115.



116.

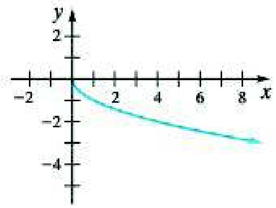


117. Ésta es la gráfica de $f(x) = \sqrt{x} + 2$.



a) Para $g(x) = -3$, trace la gráfica de $(f + g)(x)$.
b) ¿Cuál es el dominio de $(f + g)(x)$?

118. Ésta es la gráfica de $f(x) = -\sqrt{x}$



a) Para $g(x) = \sqrt{x} + 2$, trace la gráfica de $(f + g)(x)$.
b) ¿Cuál es el dominio de $(f + g)(x)$?

[7.6] *Resuelva cada ecuación y compruebe sus soluciones.*

119. $\sqrt{x} = 9$

120. $\sqrt{x} = -4$

121. $\sqrt[3]{x} = 4$

122. $\sqrt[3]{x} = -5$

123. $7 + \sqrt{x} = 10$

124. $7 + \sqrt[3]{x} = 12$

125. $\sqrt{3x + 4} = \sqrt{5x + 14}$

126. $\sqrt{x^2 + 2x - 8} = x$

127. $\sqrt[3]{x - 9} = \sqrt[3]{5x + 3}$

128. $(x^2 + 7)^{1/2} = x + 1$

129. $\sqrt{x} + 3 = \sqrt{3x + 9}$

130. $\sqrt{6x - 5} - \sqrt{2x + 6} - 1 = 0$

Para cada par de funciones, determine todos los valores de x para los que $f(x) = g(x)$.

131. $f(x) = \sqrt{3x + 4}$, $g(x) = 2\sqrt{2x - 4}$

132. $f(x) = (4x + 5)^{1/3}$, $g(x) = (6x - 7)^{1/3}$

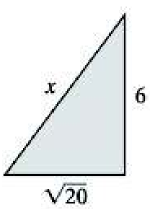
Despeje la variable que se indica.

133. $V = \sqrt{\dfrac{2L}{w}}$, para L

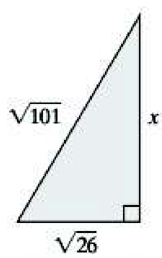
134. $r = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$, para A

Determine la longitud del lado desconocido de cada triángulo rectángulo. Escriba la respuesta como un radical en forma simplificada.

135.



136.



Resuelva.

137. Poste telefónico ¿Cuál es la longitud del cable que necesita utilizar una compañía telefónica para alcanzar la parte superior de un poste telefónico de 5 metros desde un punto a 2 metros de la base del poste?

138. Velocidad Utilice la fórmula $v = \sqrt{2gh}$ para determinar la velocidad de un objeto después de haber caído 20 pies ($g = 32$ pies/s^2).

139. Péndulo Utilice la fórmula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$$

para determinar el periodo de un péndulo, T, si su longitud, L, es de 64 pies.

140. Energía cinética y energía potencial Existen dos tipos de energía: cinética y potencial, La energía potencial es la energía debida a su posición y la energía cinética se debe al movimiento. Por ejemplo, si sostiene una bola de billar a cierta altura del suelo, ésta tiene energía potencial; si la suelta, la energía potencial se transforma en energía cinética al caer. La fórmula

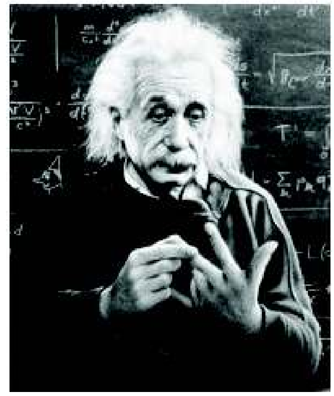
$$V = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

puede usarse para determinar la velocidad, V, en metros por segundo, cuando una masa, m, en kilogramos, tiene una energía cinética, K, en joules. Se lanza una bola de béisbol de 0.145 kg. Si la energía cinética de la bola en movimiento es de 45 joules, ¿a qué velocidad se está moviendo la bola?

141. Velocidad de la luz Albert Einstein determinó que si un objeto en reposo, con masa m_0, se hace viajar a una velocidad cercana a la de la luz, su masa aumenta a m, donde

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

En la fórmula, v es la velocidad del objeto en movimiento y c es la velocidad de la luz.* En un acelerador usado para terapia contra el cáncer, las partículas viajan a velocidades de $0.98c$, esto es, a 98% de la velocidad de la luz. A una velocidad de $0.98c$, determine la masa de la partícula, m, en términos de su masa en reposo, m_0. Utilice $v = 0.98c$ en la fórmula anterior.



[7.7] *Escriba cada expresión como un número complejo en la forma $a + bi$.*

142. 5 **143.** -8 **144.** $7 - \sqrt{-256}$ **145.** $9 + \sqrt{-16}$

Realice cada operación que se indica.

146. $(3 + 2i) + (10 - i)$ **147.** $(9 - 6i) - (3 - 4i)$ **148.** $(\sqrt{3} + \sqrt{-5}) + (11\sqrt{3} - \sqrt{-7})$

149. $\sqrt{-6}(\sqrt{6} + \sqrt{-6})$ **150.** $(4 + 3i)(2 - 3i)$ **151.** $(6 + \sqrt{-3})(4 - \sqrt{-15})$

152. $\frac{8}{3i}$ **153.** $\frac{2 + \sqrt{3}}{2i}$ **154.** $\frac{4}{3 + 2i}$ **155.** $\frac{\sqrt{3}}{5 - \sqrt{-6}}$

Evalúe cada expresión para el valor dado de x.

156. $x^2 - 2x + 9, x = 1 + 2i\sqrt{2}$ **157.** $x^2 - 2x + 12, x = 1 - 2i$

Indique si el valor de cada número imaginario es i, -1, $-i$ o 1.

158. i^{33} **159.** i^{59} **160.** i^{404} **161.** i^{802}

*La velocidad de la luz es 3.00×10^8 metros por segundo. Sin embargo, no necesitamos esta información para resolver el problema.

Examen de práctica del capítulo 7



*Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección donde se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en el **Chapter Test Prep Video CD**. Revise el material de aquellas preguntas que respondió de forma incorrecta.*

1. Escriba $\sqrt{(5x - 3)^2}$ como un valor absoluto.
2. Simplifique $\left(\frac{x^{2/5} \cdot x^{-1}}{x^{3/5}}\right)^2$.
3. Factorice $x^{-2/3} + x^{4/3}$.
4. Grafique $g(x) = \sqrt{x} + 1$.

En los ejercicios 5 a 14, simplifique. Suponga que todas las variables representan números reales positivos.

5. $\sqrt{54x^7y^{10}}$
6. $\sqrt[3]{25x^5y^2}\,\sqrt[3]{10x^6y^8}$
7. $\sqrt{\frac{7x^6y^3}{8z}}$
8. $\frac{9}{\sqrt[3]{x}}$
9. $\frac{\sqrt{3}}{3 + \sqrt{27}}$
10. $2\sqrt{24} - 6\sqrt{6} + 3\sqrt{54}$
11. $\sqrt[3]{8x^3y^5} + 4\sqrt[3]{x^6y^8}$
12. $(\sqrt{3} - 2)(6 - \sqrt{8})$
13. $\sqrt[4]{\sqrt{x^5y^3}}$
14. $\frac{\sqrt[4]{(7x + 2)^5}}{\sqrt[3]{(7x + 2)^2}}$

En los ejercicios 15-17 resuelva la ecuación.

15. $\sqrt{2x + 19} = 3$
16. $\sqrt{x^2 - x - 12} = x + 3$
17. $\sqrt{a - 8} = \sqrt{a} - 2$
18. Para $f(x) = (9x + 37)^{1/3}$ y $g(x) = 2(2x + 2)^{1/3}$, determine todos los valores de x tales que $f(x) = g(x)$.
19. Despeje g de la fórmula $w = \frac{\sqrt{2gh}}{4}$.

20. Objeto en caída La velocidad, V, en pies por segundo, después de que un objeto ha caído una distancia, h, en pies, puede determinarse mediante la fórmula $V = \sqrt{64.4h}$. Determine la velocidad de una pluma (bolígrafo) después de que ha caído 200 pies.

21. Escalera Una escalera se recarga contra una casa. Si la base de la escalera está a 5 pies de la casa y su parte superior descansa sobre la casa a 12 pies por encima del piso, determine la longitud de la escalera.



22. Resortes Una fórmula que se emplea en el estudio de resortes es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

donde T es el periodo del resorte (el tiempo necesario para que el resorte se alargue y regrese a su punto de reposo), m es la masa en el resorte, en kilogramos, y k es la constante del resorte, en newtons/metro. Una masa de 1400 kilogramos descansa sobre un resorte. Determine el periodo del resorte si su constante del resorte es de 65,000 newtons/metro.

23. Multiplique $(6 - \sqrt{-4})(2 + \sqrt{-16})$.

24. Divida $\frac{5 - i}{7 + 2i}$.

25. Evalúe $x^2 + 6x + 12$ para $x = -3 + i$.

Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen siguiente y verifique sus respuestas con las que aparecen al final del libro. Revise las preguntas que haya respondido en forma incorrecta. La sección y objetivo donde se estudia el material se indica después de la respuesta.

1. Resuelva $\frac{1}{5}(x - 3) = \frac{3}{4}(x + 3) - x$.

2. Resuelva $3(x - 4) = 6x - (4 - 5x)$.

3. Suéter Cuando su precio se rebaja 60%, un suéter cuesta \$16. Determine el precio original del suéter.

4. Determine el conjunto solución de $|3 - 2x| < 5$.

5. Grafique $y = \frac{3}{2}x - 3$.

6. Determine si las gráficas de las ecuaciones siguientes son rectas paralelas, perpendiculares o ninguna de éstas.

$$y = 3x - 8$$
$$6y = 18x + 12$$

7. Dadas $f(x) = x^2 - 3x + 4$ y $g(x) = 2x - 9$, determine $(g - f)(x)$.

8. Determine la ecuación de la recta que pasa por $(1, -4)$, y que es perpendicular a la gráfica de $3x - 2y = 6$.

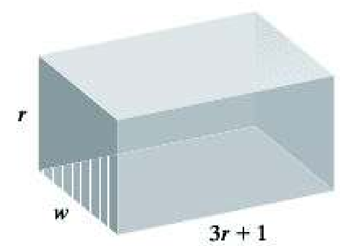
9. Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$x + 2y = 12$$
$$4x = 8$$
$$3x - 4y + 5z = 20$$

10. Evalúe el determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

11. Volumen El volumen de la caja que se ilustra a continuación es $6r^3 + 5r^2 + r$. Determine w en términos de r.



12. Multiplique $(5xy - 3)(5xy + 3)$.

13. Resuelva $\sqrt{2x^2 + 7} + 3 = 8$.

14. Factorice $4x^3 - 9x^2 + 5x$.

15. Factorice $(x + 1)^3 - 27$.

16. Resuelva $8x^2 - 3 = -10x$.

17. Multiplique $\frac{4x + 4y}{x^2y} \cdot \frac{y^3}{12x}$.

18. Sume $\frac{x - 4}{x - 5} - \frac{3}{x + 5} - \frac{10}{x^2 - 25}$.

19. Resuelva $\frac{4}{x} - \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$.

20. Objeto en caída La distancia, d, de un objeto en caída libre es directamente proporcional al cuadrado del tiempo, t. Si un objeto cae 16 pies en 1 segundo, ¿qué distancia recorrerá un objeto que cae durante 5 segundos?